Blatt 6: Simpliziale Homologie

1. Erste Beispiele

Sei K ein Simplizialkomplex.

Ü 1.1. Zeigen Sie, dass zwei Ecken in K genau dann homolog sind, wenn sie verbindbar sind durch einen Kantenweg. Konstruieren Sie hieraus einen natürlichen Isomorphismus $h_0 \colon \mathbb{Z}\pi_0(K) \xrightarrow{\sim} H_0(K)$.

Ü 1.2. Konstruieren Sie den natürlichen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(K,x_0) \to H_1(K)$. Da $H_1(K)$ abelsch ist, erhalten wir $h_1 \colon \pi_1(K,x_0)/\mathrm{ab} \to H_1(K)$. Zeigen Sie, dass dies für jeden zusammenhängenden Simplizialkomplex K ein Isomorphismus ist (durch Konstruktion expliziter Isomorphismen).

Hinweis: $\pi_1(K,x_0)$ haben wir als Kantengruppe explizit beschrieben nach Wahl eines Spannbaums durch Erzeuger und Relationen. Diese Beschreibung kann man auch hier gut nutzen.

Ü 1.3. Berechnen Sie die Homologiegruppen $H_*(F_g^+)$ der orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht g. Wählen Sie zunächst eine Triangulierung und geben Sie dann geeignete Erzeuger, oder besser: eine Basis, möglichst explizit an.

Berechnen Sie anschließend die Homologiegruppen $H_*(F_g^-)$ der nicht-orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht g.

Berechnen Sie schließlich $H_*(F_{g,r}^{\pm})$ für Flächen mit Rand.