Blatt 5: Faserbündel

1. Grundlegende Eigenschaften

Ü 1.1. Die folgenden Übungen dienen zum Verständnis der Definitionen:

(a) Für jedes lokal triviale Bündel $F \to E \xrightarrow{p} B$ ist p eine offene Abbildung. Somit vermittelt $p\colon E \to B$ die Identifizierungstopologie von E auf B.

(b) Genau dann ist E hausdorffsch, wenn Basis B und Faser F es sind.

(c) Genau dann ist E kompakt, wenn Basis B und Faser F es sind.

(d) Ist ein Bündel $p\colon E \to B$ lokal trivial, so sind über jeder hinreichend kleinen Umgebung von $x \in B$ homöomorph zu $p^{-1}(x)$. Über jedem zusammenhängenden Teilraum $Z \subset B$ sind daher die Fasern untereinander homöomorph.

(e) Sind alle Fasern eines lokal trivialen Bündels $p\colon E \to B$ untereinander homöomorph, und somit zu einer typischen Faser F, so ist p ein Faserbündel.

(f) Sind p_1 und p_2 lokal trivial, so auch $p_1 \sqcup p_2\colon E_1 \sqcup E_1 \to B_1 \sqcup B_2$. Sind zudem p_1 und p_2 Faserbündel mit derselben Faser F, so auch $p_1 \sqcup p_2$.

(g) Sind zwei Bündel $p_1\colon E_1 \to B_1$ und $p_2\colon E_2 \to B_2$ trivial (bzw. lokal trivial), so auch ihr Produkt $p_1 \times p_2\colon E_1 \times E_1 \to B_1 \times B_2$. Sind p_1 und p_2 Faserbündel mit Faser F_1 bzw. F_2, dann ist $p_1 \times p_2$ ein Faserbündel mit Faser $F_1 \times F_2$.

(h) Sind $p_1\colon E_1 \to B$ und $p_2\colon E_2 \to B$ Faserbündel über demselben Basisraum B, dann setzen wir $E = \{ (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(x_1) = p_2(x_2) \}$ und erhalten ein Faserbündel $p = p_1 \oplus p_2\colon E \to B$ mit $p(x_1,x_2) = p_1(x_1) = p_2(x_2)$.

2. Getwistete Produkte

Sei F ein topologischer Raum und $\alpha\colon F \to F$ ein Homöomorphismus. Wir definieren $\mathbb{S}^1 \rtimes_\alpha F := (\mathbb{R} \times F)/_\sim$ durch die Identifikation $(x,y) \sim (x+1, f(y))$. Hierauf ist die Abbildung $p\colon \mathbb{S}^1 \rtimes_\alpha F \to \mathbb{S}^1$ mit $p(x,y) = e^{2\pi i x}$ wohldefiniert und stetig. Wir nennen $p\colon \mathbb{S}^1 \rtimes_\alpha F \to \mathbb{S}^1$ das *α–getwistete Produkt* über $\mathbb{S}^1$.

Ü 2.1. (a) Die Abbildung $p\colon \mathbb{S}^1 \rtimes_\alpha F \to \mathbb{S}^1$ ist ein Faserbündel mit Faser F.

(b) Für $F = [-1,+1]$ und $\alpha = \mathrm{id}_F$ erhält man den Zylinder.

(c) Für $F = [-1,+1]$ und $\alpha = -\mathrm{id}_F$ erhält man das Möbiusband.

(d) Für $F = \mathbb{S}^1$ und $\alpha = \mathrm{id}_F$ erhält man den Torus.

(e) Für $F = \mathbb{S}^1$ und $\alpha = -\mathrm{id}_F$ erhält man die Kleinsche Flasche.

S 2.2. Jedes Faserbündel über $\mathbb{S}^1$ ist von der Form $p\colon \mathbb{S}^1 \rtimes_\alpha F \to \mathbb{S}^1$.

Allgemein darf man sich ein Faserbündel $F \to E \to B$ als ein irgendwie getwistetes Produkt $E = B \rtimes F$ vorstellen. Der Twist kann hierbei jedoch sehr viel komplizierter ausfallen, als das einfachste Beispiel $B = \mathbb{S}^1$ erahnen lässt.

3. Projektive Räume

3.1. Die Konstruktion des reell-projektiven Raumes definiert ein Faserbündel $\{\pm 1\} \to \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$. (Dies ist eine zweiblättrige Überlagerung.)

S 3.2. Die Konstruktion des komplex-projektiven Raumes definiert ein Faserbündel $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$. Zeigen Sie, dass man für $n = 1$ die Hopf–Faserung $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ erhält.

3.3. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ betrachten wir $E = \{ ([x], y) \in \mathbb{KP}^n \times \mathbb{K}^{n+1} \mid y \in \mathbb{K}x \}$ zusammen mit der Projektion $p\colon E \to \mathbb{KP}^n$, $p([x], y) = [x]$. Dies ist ein Faserbündel, genannt das *tautologische Bündel* über $\mathbb{KP}^n$.

3.4. Welche Informationen liefert die lange exakte Homotopiesequenz dieser Bündel?

4. Tangentialbündel über Sphären

Ü 4.1. (a) Zeigen Sie, dass über jeder Sphäre $\mathbb{S}^n$ das Tangentialbündel

$$T\mathbb{S}^n = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n \;\middle|\; \langle x, v\rangle = 0 \right\}$$

mit $p\colon T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $p(x, v) = x$, ein Faserbündel ist. Für gerades n sagt Ihnen der Satz vom Igel, dass dieses Bündel nicht-trivial ist: Warum?

(b) Neben dem Tangentialbündel betrachten wir das Normalenbündel

$$N\mathbb{S}^n = \left\{ (x, w) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n \;\middle|\; w \in \mathbb{R}x \right\}$$

mit $q\colon N\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $q(x, w) = x$. Zeigen Sie, dass auch q ein Faserbündel ist. Ist es trivial? Zeigen Sie, dass die Summe $p \oplus q$ ein triviales Bündel ist.

(c) Zum Tangentialbündel betrachten wir das zugehörige Sphärenbündel

$$T^1\mathbb{S}^n = \left\{ (x, v) \in T\mathbb{S}^n \;\middle|\; |v| = 1 \right\}.$$

Man zeige, dass auch dies ein Faserbündel über $\mathbb{S}^n$ ist. Was erhalten wir im Falle $n = 2$? Ist $T^1\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{S}^3$ und $p\colon T^1\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ isomorph zur Hopf-Faserung?

(d) Die Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ operiert auf $\mathbb{S}^2$ und induziert ein Faserbündel $\mathrm{SO}(3) \to \mathbb{S}^2$ mit Faser $\mathbb{S}^1$. Die zweifache Überlagerung liefert die Hopf-Faserung.

4.2. Wir betrachten Rotationen im $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Operation von $\mathrm{SO}(n+1)$ auf $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ induziert ein Faserbündel mit Faser $\mathrm{SO}(n)$. Welche Informationen über die Gruppen $\mathrm{SO}(n)$ liefert die lange exakte Homotopiesequenz dieser Bündel?

5. Konfigurationsräume

Ü 5.1. Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension $d \geq 2$.

(a) Der Raum X ist *lokal homogen*, das heißt, jeder Punkt $x \in X$ besitzt beliebig kleine offene Umgebungen U mit folgender Eigenschaft: Zu jedem Punkt $y \in U$ existiert ein Homöomorphismus $h\colon X \xrightarrow{\sim} X$ mit $h(x) = y$ und $h|_{X \smallsetminus U} = \mathrm{id}_{X \smallsetminus U}$. (Man gebe U und h möglichst explizit an, zum Beispiel $\overline{U} \subset \mathbb{R}^d$ kompakt konvex und h sternförmig.)

(b) Zu $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ betrachten wir den *Konfigurationsraum*

$$\tilde{C}_n(X) := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in X^n \;\middle|\; x_i \neq x_j \text{ für alle } i \neq j \right\}$$

bestehend aus allen Konfigurationen von n verschiedenen Punkte aus X. Dann existiert eine Homotopie $H\colon \tilde{C}_n(X) \times [0,1] \to \tilde{C}_n(X)$ mit $H_0 = \mathrm{id}$ und $H_1(a) = b$, wobei jedes H_t ein Homöomorphismus ist. (Das heißt, H ist eine Isotopie).

(c) Für $1 \leq m < n$ definieren wir $p\colon \tilde{C}_n(X) \to \tilde{C}_m(X)$ mit $p(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$. Man zeige, dass p ein Faserbündel ist mit Faser $\tilde{C}_{n-m}(X \smallsetminus \{x_1, \dots, x_m\})$.

(d) Es gilt $\tilde{C}_1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ und $\tilde{C}_2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Was liefert die lange exakte Homotopiesequenz der Bündel $p\colon \tilde{C}_n(X) \to \tilde{C}_{n-1}(X)$ für $n = 2, 3, 4, \dots$?

(e) Ist die universelle Überlagerung von $\tilde{C}_n(X)$ zusammenziehbar?