Blatt 4: Die lange exakte Homotopiesequenz

Aufgrund des Maifeiertags und Prof. Eisermanns Entdeckung der Langsamkeit hat die Vorlesung diese Woche nur kleine Fortschritte gemacht. Immerhin wurde die Exaktheit der langen Homotopiesequenz bewiesen. Dieses Blatt dient daher zum Verschnaufen, zum Innehalten, und wenn möglich zum Konsolidieren.

1. Die lange exakte Homotopiesequenz

Ü 1.1. Wiederholen und prüfen Sie alle Schritte von der Definition der Homotopiegruppen bis zur langen exakten Homotopiesequenz. Fertigen Sie die nötigen Skizzen an und übersetzen Sie diese in möglichst explizite Formeln. Die Homotopiesequenz ist natürlich und verträglich mit dem Verschieben des Basispunktes.

Ü 1.2. Sei (X,A,x_0) ein Raumpaar mit Basispunkt.

(a) Genau dann induziert die Inklusion $i\colon A \hookrightarrow X$ Isomorphismen

$$\pi_n(i)\colon \pi_n(A,x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_n(X,x_0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn $\pi_n(X,A,x_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Genau dann induziert die Inklusion $j\colon (X,\{x_0\}) \hookrightarrow (X,A)$ Isomorphismen

$$\pi_n(j)\colon \pi_n(X,x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_n(X,A,x_0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn $\pi_n(A,x_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Genau dann ist der Randhomomorphismus ein Isomorphismus

$$\partial_\sharp\colon \pi_{n+1}(X,A,x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_n(A,x_0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn $\pi_n(X,x_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Als illustrative Beispiele betrachte man X zusammenziehbar, oder A zusammenziehbar, oder einen starken Homotopieretrakt $A \subset X$.

Ü 1.3. Zeigen Sie, dass jede Gruppe G als relative Fundamentalgruppe $\pi_2(X,A,x_0)$ auftreten kann. *Hinweis:* Man konstruiere zunächst einen Raum A mit $\pi_1(A,x_0) \cong G$ und betrachte hierüber den Kegel $X = CA$.

2. Der Pseudokreis als warnendes Gegenbeispiel

Ü 2.1. Die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ ist das Bild der stetigen Bijektion

$$\varphi\colon]0,1] \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \varphi(t) = \exp(2\pi i t).$$

Der Pseudokreis $K \subset \mathbb{C}$ ist das Bild der stetigen Bijektion

$$\psi\colon]0,1] \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \psi(t) = \exp(2\pi i t + \sin(2\pi/t)).$$

(a) Skizzieren Sie K und zeigen Sie $\pi_n(K,1) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es existiert eine zusammenhängende zweifache Überlagerung $\tilde{K} \to K$.

(c) Die Galois–Korrespondenz gilt hier nicht. Woran liegt das?

(d) Versuchen Sie zu zeigen, dass K nicht zusammenziehbar ist.

(e) Folgern Sie hieraus, dass $K \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ kein Retrakt ist.

In den letzten beiden Aspekten verhält sich der Pseudokreis K wie die Kreislinie $\mathbb{S}^1$: Diese ist nicht zusammenziehbar und $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ ist kein Retrakt. Beide Aussagen folgen aus der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{S}^1,x_0) \cong \mathbb{Z}$. Für den Pseudokreis K versagt die Fundamentalgruppe allerdings, und sie zu ersetzen fehlen uns noch geeignete algebraische Hilfsmittel.