Blatt 3: Von Fundamentalgruppen zu Homotopiegruppen

*Schriftlich abzugebende Aufgaben sind mit **S** gekennzeichnet und Aufgaben, die in der Übung besprochen werden sollen, mit **Ü**. Alle weiteren sind zu Allgemeinbildung und Unterhaltung gedacht.*

1. Jede topologische Gruppe hat abelsche Fundamentalgruppe

Für einen topologischen Raum X ist $\pi_0(X)$ nur eine Menge und $\pi_1(X,x_0)$ zwar eine Gruppe aber im Allgemeinen nicht abelsch. Für topologische Gruppen wie $\mathbb{S}^1$ oder $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ oder $\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ erhalten wir hier mehr Struktur:

Ü 1.1. Für jede topologische Gruppe G ist $\pi_0(G)$ eine Gruppe und $\pi_1(G,1)$ abelsch. (Hinweis: Für Schleifen α,β in $(G,1)$ haben wir Homotopien $\alpha * 1 \sim 1 * \alpha$ und $1 * \beta \sim \beta * 1$. Was erhält man durch ihre punktweise Multiplikation?)

Zur Erinnerung: Eine topologische Gruppe $(G,\cdot,1,i)$ besteht aus einem topologischen Raum G mit einem abgeschlossenen Element $1 \in G$ und stetigen Abbildungen $\cdot\colon G\times G \to G$ und $i\colon G \to G$, die die Gruppenaxiome erfüllen, also $1\cdot a = a \cdot 1 = a$ und $a\cdot i(a) = i(a)\cdot a = 1$ sowie $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ für alle $a,b,c \in G$.

1.2. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(G,1)$ operiert auf den höheren Homotopiegruppen $\pi_n(G,1)$. Ist diese Operation für jede topologische Gruppe $(G,1)$ trivial?

1.3. Zusatz: Manche Voraussetzung kann man abschwächen, zum Beispiel Gleichheit durch Homotopie ersetzen. Was braucht man, damit $\pi_0(G)$ eine Gruppe wird? Was braucht man, damit $\pi_1(G,1)$ abelsch wird? Trivial operiert?

2. Jede Mannigfaltigkeit hat abzählbare Fundamentalgruppe

Aus der Überlagerungstheorie wiederhole man Definitionen und Beispiele der Begriffe „lokal wegzusammenhängend“ und „semilokal einfach zusammenhängend“. Als schöne Beispiele denken wir insbesondere an Zellkomplexe und Mannigfaltigkeiten. (Letztere sind lokal euklidische Hausdorff–Räume mit abzählbarer Basis.)

Ü 2.1. Sei X lokal wegzusammenhängend, semilokal einfach zusammenhängend und erlaube eine abzählbare Basis der Topologie (zweites Abzählbarkeitsaxiom).
(a) Die Topologie von X erlaubt dann eine abzählbare Basis bestehend aus wegzusammenhängenden offenen Mengen U, für die die Inklusion $U \hookrightarrow X$ den trivialen Homomorphismus $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ induziert.
(b) Für jedes $x_0 \in X$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ abzählbar.
(c) Für (b) kann auf keine der drei Voraussetzungen verzichtet werden.
Insbesondere ist für jede Mannigfaltigkeit die Fundamentalgruppe abzählbar.

2.2. Die Lusternik–Schnirelmann–Kategorie $\mathrm{cat}(X)$ eines topologischen Raumes X ist die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ für die es eine offene Überdeckung $X = U_0 \cup \cdots \cup U_n$ gibt, sodass jede der Inklusionen $U_k \hookrightarrow X$ zusammenziehbar ist.
(a) Kategorie 0 bedeutet, dass X zusammenziehbar ist. Man folgere $\mathrm{cat}(\mathbb{S}^1) = 1$.
(b) Aus $\mathrm{cat}(X) = 1$ folgt mit Seifert–van Kampen, dass $\pi_1(X,x_0)$ frei ist.
(c) Man berechne die Lusternik–Schnirelmann–Kategorie für kompakte Flächen.

3. Berechnung von Fundamentalgruppen

Mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen beweise man die in der Vorlesung formulierte polygonale / simpliziale / zelluläre Darstellung der Fundamentalgruppe:

S 3.1. Für jede offene Menge $X \subset \mathbb{R}^d$ gilt $\pi_1^{\mathrm{pl}}(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_0)$, induziert durch die topologische Realisierung von Polygonzügen als Wege in X.

3.2. Für jeden Simplizialkomplex K gilt $\pi_1(K,x_0) \cong \pi_1(|K|,x_0)$, induziert durch die topologische Realisierung von Kantenzügen in K als Wege in $|K|$.

Ü 3.3. Für jeden Zellkomplex X induziert die Inklusion $\iota\colon X_1 \hookrightarrow X$ einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X_1,x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(X,x_0)$, dessen Kern durch die Anheftung der 2–Zellen beschrieben wird.

4. Höhere Homotopiegruppen

Zum Aufwärmen beginnen wir mit einer leichten Übung.

4.1. Seien (X,x_0) und (Y,y_0) topologische Räume und $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. Konstruieren Sie eine Gruppenisomorphismus

$$\pi_n(X \times Y,(x_0,y_0)) \xrightarrow{\sim} \pi_n(X,x_0) \times \pi_n(Y,y_0)$$

sowie sein Inverses und beweisen Sie die nötigen Eigenschaften.

Sei $I^n = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ der n–dimensionale Würfel, ∂I^n sein Rand und $\operatorname{Int} I^n$ sein Inneres. Wir betrachten $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ vermöge $(x_1,\dots,x_{n-1}) \mapsto (x_1,\dots,x_{n-1},0)$. Somit ist I^{n-1} eine Seite von I^n. Sei $J^{n-1} = I^n \smallsetminus \operatorname{Int} I^{n-1}$ die Vereinigung aller anderen Seiten.

Im Quotienten $X /\!\!/ A$ wird der Teilraum A zu einem Punkt zusammengeschlagen.

Ü 4.2. (a) Man konstruiere (möglichst explizit) einen Homöomorphismus $J^{n-1} \xrightarrow{\sim} I^{n-1}$, am besten durch eine geeignete stückweise affine Abbildung.

(b) Man konstruiere (möglichst explizit) einen Homöomorphismus $I^n /\!\!/ \partial I^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ und induziere so eine Bijektion $\pi_n(X,x_0) \cong [(\mathbb{S}^n,e_1),(X,x_0)]$.

(c) Man konstruiere einen Homöomorphismus $\mathbb{S}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$.
Hierbei ist $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ der Äquator und $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ das Bouquet.

(d) Für $f,g\colon (\mathbb{S}^n,e_1) \to (X,x_0)$ kann man eine Verknüpfung $f * g$ erklären durch

$$\mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n \xrightarrow{f \vee g} X.$$

Entspricht dies der Verknüpfung der Homotopiegruppe $\pi_n(X,x_0)$?

S 4.3. (a) Sei $x_0 \in A \subset X$. Dann ist $\pi_n(X,A,x_0)$ mit der üblichen Verknüpfung eine Gruppe für $n \ge 2$ und kommutativ für $n \ge 3$.

(b) Jede stetige Abbildung $f\colon (X,A,x_0) \to (Y,B,y_0)$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $f_\sharp\colon \pi_n(X,A,x_0) \to \pi_n(Y,B,y_0)$ durch $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$.

(c) Man konstruiere einen Homöomorphismus $I^n /\!\!/ J^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n$. Durch Zusammenschlagen von J^{n-1} erhalten wir so $(I^n,\partial I^n,J^{n-1}) /\!\!/ J^{n-1} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1},s_0)$ und $\pi_n(X,A,x_0) \cong [(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1},s_0),(X,A,x_0)]$.