Blatt 2: Satz von Seifert-van Kampen

*Schriftlich abzugebende Aufgaben sind mit **S** gekennzeichnet und Aufgaben, die in der Übung besprochen werden sollen, mit **Ü**. Die schriftlichen Aufgaben dieser Woche sollten idealerweise in der Vorlesung am Dienstag, spätestens aber zu Beginn der Übung am Mittwoch abgegeben werden.*

1. Fundamentalgruppen

S 1.1. Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ stetige Abbildungen.

Wenn $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ injektiv ist, gilt dies dann auch für den induzierten Gruppenhomomorphismus $f_\sharp\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$? Und wenn eine Retraktion $g\colon (Y,y_0) \to (X,x_0)$ existiert, also $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gilt?

Wenn $g\colon (Y,y_0) \to (X,x_0)$ surjektiv ist, gilt dies dann auch für en induzierten Gruppenhomomorphismus $g_\sharp\colon \pi_1(Y,y_0) \to \pi_1(X,x_0)$? Und wenn ein Schnitt $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ existiert, also $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gilt?

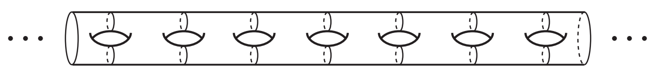
1.2. Formulieren (und beweisen) Sie eine Klassifikation endlicher Graphen bis auf Homotopie–Äquivalenz. Als Beispiele betrachten wir die 26 Großbuchstaben des lateinischen Alphabets:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Als Teilmenge der euklidischen Ebene ist jedes dieser Symbole ein topologischer Raum. Man klassifiziere diese Räume bezüglich Homöomorphie und bezüglich Homotopie-Äquivalenz. Hierbei nehmen wir zunächst an, dass jedes Symbol ideal dünn ist, also ein Graph. Wie lautet das Ergebnis, wenn wir die Symbole als realistisch dick annehmen, also als Flächen mit Rand?

2. Satz von Seifert-van Kampen

S 2.1. (a) Finden Sie die Fundamentalgruppe der Fläche von unendlichem Geschlecht, das heißt, einer unendlichen verbundenen Summe von Tori.



(b) Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ die Vereinigung von n verschiedenen Ursprungsgeraden, wobei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X, x_0)$ für $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus x_0$.

2.2. Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ die Vereinigung von Kugeln vom Radius $1/n$ und Mittelpunkt $(1/n, 0, 0)$ für $n = 1, 2, \dots$. Ist X einfach zusammenhängend?

Ü 2.3. (a) Die Fundamentalgruppe jeder offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist abzählbar. (Man betrachte die polygonale Darstellung mit rationalen Eckpunkten.)

(b) Auf die Offenheit kann hier nicht verzichtet werden: Beschreiben Sie für $A \subset \mathbb{R}$ möglichst explizit die Fundamentalgruppe des Teilraumes

$$X_A = (\mathbb{R} \times \{\pm 1\}) \cup (A \times [-1, +1])$$

in $\mathbb{R}^2$. (Das geht mit dem verallgemeinerten Satz von Seifert–van Kampen.) Betrachten Sie insbesondere die Fälle $A = \mathbb{Q}$ und $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Bemerkung: Für eine offene Menge $X \subset \mathbb{R}^2$ stellt man sich vor, der Rang von $\pi_1(X,x_0)$ zählt die „Löcher“ von X. Das vorige Beispiel zeigt, dass $\pi_1(X,x_0)$ eher die „Brücken“ zählt. Nur im endlichen Fall haben wir eine Dualität zwischen Löchern und Brücken. (Dies ist eine Vorahnung der Poincaré–Dualität.)

2.4. Der Join $X * Y$ zweier topologischer Räume X und Y ist der Quotient von $X \times Y \times [0,1]$, der durch die Äquivalenzrelation $(x,y_1,0) \sim (x,y_2,0)$ für $x \in X$ und $y_1,y_2 \in Y$ sowie $(x_1,y,1) \sim (x_2,y,1)$ für $x_1,x_2 \in X$ und $y \in Y$ induziert wird.

(a) Wenn X und Y diskret und endlich sind, wie sieht der Join $X * Y$ aus? Skizzieren Sie als Beispiel $K_{3,3} = \{1,2,3\} * \{a,b,c\}$.

(b) Zeigen Sie, dass der Join $X * Y$ einfach zusammenhängend ist, wenn X wegzusammenhängend ist.

3. Bouquet von Räumen

Sei $(X_i,x_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume mit Basispunkt. Auf der Summe $Y = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ erzeugen wir ein Äquivalenzrelation durch $x_i \sim x_j$ für alle $i,j \in I$. Das *Bouquet* ist dann der Raum $X = Y/_\sim$. Im Quotienten ist $x_0 = [x_i]$ der gemeinsame Basispunkt, und der Quotient (X,x_0) wird so auf natürliche Weise mit einem Basispunkt ausgestattet. Wir schreiben dies

$$(X,x_0) = \bigvee_{i\in I}(X_i,x_i).$$

S 3.1. Angenommen, $x_i \in X_i$ ist starker Deformationsretrakt einer offenen Umgebung $U_i \subset X_i$. Dann erhalten wir das freie Produkt

$$\pi_1\left[\bigvee_{i\in I}(X_i,x_i)\right] \cong \mathop{\bigstar}_{i\in I} \pi_1(X_i,x_i).$$

4. Der Einbettungssatz von Whitney für Simplizialkomplexe

Ü 4.1. Sei K ein endlicher Simplizialkomplex der Dimension m. Dann existiert eine affine Einbettung $|K| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$. (Hinweis: Man betrachte Eckpunkte in möglichst allgemeiner Lage und gewinne hieraus die affinen Simplizes.)

Die Dimension $2m+1$ ist im Allgemeinen nötig, wie schon der Fall $m=1$ zeigt: Manche Graphen lassen sich in die Ebene einbetten, aber nicht alle! Man überlege sich hierzu Gegenbeispiele. (Nach dem Satz von Kuratowski gibt es im Wesentlich genau zwei Gegenbeispiele, genannt K_5 und $K_{3,3}$.)