Blatt 1: Komplexe, Fundamentalgruppen und Überlagerungen

Leseanleitung: *Es wäre viel verlangt, alle Aufgaben ausführlich zu* lösen*, aber* lesen *und bedenken sollen Sie bitte alle Aufgaben. Manchmal genügt eine Idee, manchmal steckt der Teufel im Detail.*

*Schriftlich abzugebende Aufgaben sind mit **S** gekennzeichnet und Aufgaben, die in der Übung besprochen werden sollen, mit **Ü**. Die schriftlichen Aufgaben dieser Woche sind am Anfang der Übung abzugeben.*

Zielsetzung: *Dieses Übungsblatt wiederholt bzw. vertieft Fundamentalgruppen und Überlagerungen. Außerdem nutzen wir im Folgenden ausgiebig Zellkomplexe, und auch hierzu bieten diese Übungen einen Einstieg. Das Ziel im letzten Abschnitt ist eine schöne Anwendung von Überlagerungen auf Gruppen.*

1. Zellkomplexe

S 1.1. (a) Finden Sie eine Triangulierung $|K| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ durch einen geeigneten Simplizialkomplex K. (Zusatz: Wie viele Simplizes benötigen Sie für K?)
(b) Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $\mathbb{D}^n \mathbin{/\!\!/} \mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$ und beschreiben Sie $\mathbb{S}^n$ als Zellkomplex mit nur zwei Zellen.
(c) Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{*\} \cong \mathbb{R}^n$ und beschreiben Sie $\mathbb{S}^n$ als (glatte) Mannigfaltigkeit mit einem Atlas aus nur zwei Karten.
(d) Zeigen Sie, dass für $m < n$ jede Abbildung $\mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ nullhomotop ist (i) mit Hilfe simplizialer Approximation, (ii) mit Hilfe zellulärer Approximation, oder (iii) mit Hilfe glatter Approximation (wenn Sie damit vertraut sind).

S 1.2. Das Paar (X,A) entstehe durch Anheften von n–Zellen vermöge $I \times \mathbb{S}^{n-1} \to A$.
(a) Genau dann ist X hausdorffsch, wenn A hausdorffsch ist.
(b) Genau dann ist X kompakt, wenn A kompakt und I endlich ist.

1.3. (a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex mit nicht-leerem Inneren, oder allgemeiner sternförmig bezüglich jedes Punktes $x \in B(a,\varepsilon)$ für ein $a \in K$ und $\varepsilon > 0$. Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $f(K) = \mathbb{D}^n$.
(b) Zeigen Sie $\mathbb{D}^p \times \mathbb{D}^q \cong \mathbb{D}^{p+q}$ mit $(\mathbb{D}^p \times \mathbb{S}^{q-1}) \cup (\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{D}^q) \cong \mathbb{S}^{p+q-1}$.
(c) Zu Zellkomplexen $(X,\mathscr{X})$ und $(Y,\mathscr{Y})$ konstruiere man eine Zellstruktur auf $X \times Y$. (Zur Vereinfachung kann man X und Y als kompakt annehmen.)

1.4. Ist $(X,\mathscr{X})$ ein Zellkomplex und $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung, dann lässt sich die Zellstruktur $\mathscr{X}$ auf X zu einer Zellstruktur $\mathscr{Y}$ auf Y hochheben. (Gleiches gilt für Simplizialkomplexe.) Ist X kompakt und p endlich mit n Blättern, so ist auch Y kompakt. Welche Beziehung gilt in diesem Fall zwischen $\chi(X)$ und $\chi(Y)$?

2. Graphen und freie Gruppen

Ein *Graph* ist ein simplizialer Komplex der Dimension ≤ 1. Für Graphen ist die Dimension wohldefiniert und die Triangulierung im Wesentlichen eindeutig:

2.1. Sei X ein topologischer Raum und $|K| \xrightarrow{\sim} X$ und $|L| \to X$ seien Triangulierungen. Aus $\dim K = 0$ folgt $\dim L = 0$, und es gilt $K \cong L$. Aus $\dim K = 1$ folgt $\dim L = 1$, und es existieren Unterteilungen K' von K und L' von K sodass $K' \cong L'$ gilt.

2.2. Sei K ein simplizialer Komplex. Genau dann ist der topologische Raum $|K|$ wegzusammenhängend, wenn das 1–Skelett von K zusammenhängend ist.

Ein Graph K heißt *zykelfrei*, wenn für jede Kante $\{a,b\}$ in K gilt, dass die Ecken a,b nicht durch einen Weg in $K \smallsetminus \{\{a,b\}\}$ verbindbar sind. Ein Graph K heißt *Baum* wenn er zusammenhängend und zykelfrei ist.

2.3. Für jeden Teilgraph T eines zusammenhängenden Graphen K sind äquivalent:
(a) T ist ein minimaler zusammenhängender Teilgraph von K.
(b) T ist ein maximaler zykelfreier Teilgraph von K.
(c) T ist ein Baum, der alle Ecken von K enthält.
Einen solchen Teilgraph T nennt man *Spannbaum* von K. Jeder zusammenhängende Graph K enthält (mindestens) einen Spannbaum.

S 2.4. Für jeden Graphen K ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(K,*)$ frei. Welche Beziehung gilt zwischen der Euler–Charakteristik $\chi(K)$ und dem Rang von $\pi_1(K,*)$? Zumindest hier ist die Euler–Charakteristik also homotopie-invariant.

2.5. Für jeden Graphen K sind äquivalent:
(a) K ist ein Baum.
(b) K ist zusammenziehbar.
(c) K ist zusammenhängend und $\chi(K) = 1$.
(d) K ist zusammenhängend und $\pi_1(K,*) = \{1\}$.
(e) Je zwei Ecken von K sind durch genau einen Kantenpfad verbindbar sind.
Wenn nötig beweise man dies zur Vereinfachung für *endliche* Graphen.

3. Flächen und Flächengruppen

Ü 3.1. Nennen Sie möglichst präzise den Klassifikationssatz für geschlossene Flächen. Stellen Sie jede der Flächen $F_g^\pm$ möglichst effizient als Zellkomplex dar und berechnen Sie zur Kontrolle die Euler–Charakteristik. Gewinnen Sie hieraus eine Präsentation von $\pi_1(F_g^\pm)$ durch Erzeuger und Relationen. Berechnen Sie die Abelschmachung $\pi_1(F_g^\pm)_{\text{ab}}$ und zeigen Sie so, dass die Gruppen $\pi_1(F_g^\pm)$ untereinander nicht isomorph sind, und somit die Räume $F_g^\pm$ untereinander nicht homöomorph sind. Wie kann man sicherstellen, bei der Zellstruktur wirklich die minimale Anzahl von Ecken, Kanten und Flächen erreicht zu haben?

4. Überlagerungen und Gruppen

4.1. Nennen Sie möglichst präzise die Galois–Korrespondenz zwischen Überlagerungen eines Raumes (X,x_0) und Untergruppen von $\pi_1(X,x_0)$.

Als Anwendung der Überlagerungstheorie auf Graphen beweisen Sie den Satz von Nielsen–Schreier, als politischer Slogan: *Freiheit für alle Untergruppen!*

Ü 4.2. In einer freien Gruppe F ist jede Untergruppe $G < F$ frei. Welche Beziehung gilt zwischen dem Rang von F und von G und dem Index $|G : F|$?
(a) Was sagt dieser Satz für die freie Gruppe $(\mathbb{Z},+)$ vom Rang 1?
(b) Sei F frei erzeugt von a und b. Geben Sie Untergruppen $G < F$ vom Rang $3,4,5,\dots,\infty$ an, am besten durch Nennung von freien Erzeugern.

Ü 4.3. Eine Gruppe $G \cong \pi_1(F_g^\pm)$ heißt *Flächengruppe*. Zeigen Sie, dass jede Untergruppe $H < G$ von endlichem Index ebenfalls eine Flächengruppe ist, also $H \cong \pi_1(F_h^\pm)$. Welche Beziehung besteht zwischen g und h und dem Index?
(a) Was sagt dieser Satz für die Gruppe $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \cong \pi_1(F_1^+)$?
(b) Welche Flächengruppen $\pi_1(F_g^\pm)$ sind frei?