Algebraische Topologie: Übungsblatt 0
(für die Übung am 11. April)

1. (mündlich) (a) Finden Sie alle Untergruppen der zyklischen Gruppe der Ordnung 4.

(b) Bestimmen Sie alle Homomorphismen zwischen denen in (a) gefundenen Gruppen.

(c) Die Gruppe B_3 sei gegeben durch die folgende Darstellung mit Erzeugern und Relationen

$$\{s_1, s_2 \mid s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2\}.$$

Zeigen Sie, dass B_3 unendlich viele Elemente hat und dass es einen surjektiven Homomorhismus von B_3 auf die Gruppe der Permutationen von drei Elementen gibt. Beschreiben Sie den Kern dieses Homomorphismus.

2. (mündlich) (a) Sei $\mathbb{R}[x]$ der Polynomring in der Unbekannten x. Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome vom Grad mindestens 3 ein Ideal in $\mathbb{R}[x]$ ist.

(b) Seien R und S Ringe und $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass der Kern von f ein Ideal von R ist. Ist das Bild auch ein Ideal von S? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(c) Zeigen Sie, dass die Sequenz von Ringen $0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{\iota} R \xrightarrow{f} \mathrm{Bild} f \longrightarrow 0$, wobei ι die natürlich Inklusion ist, exakt ist. Folgern Sie, dass der Quotient $R/\ker(f)$ isomorph zum Bild von f ist.

3. (mündlich) (a) Seien X_n zusammenhängende topologische Räume für $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $X_i \cap X_{i+1} \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ zusammenhängend ist.

(b) Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subset X$. Zeigen Sie, dass wenn C ein zusammenhängender Teilraum von X ist, der sowohl A als auch $X \setminus A$ schneidet, dann schneidet C auch den Rand von A.

4. (mündlich) (a) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}$ mit der Zariski Topologie (i.e. kofinite Topologie) jeder Unterraum kompakt ist.

(b) Definiere eine Topologie auf $\mathbb{R}$ durch offenen Mengen O, die die Eigenschaft haben, dass ihr Komplement entweder abzählbar oder $\mathbb{R}$ ist. Ist das Intervall $[0, 1]$ dann kompakt in $\mathbb{R}$?

5.(mündlich) Berechnen Sie jeweils die Fundamentalgruppe des topologischen Raumes X:

(a) X ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ mit folgender Form: ∞

(b) $X = S^1 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$.

(c) $X = \mathbf{RP}^n$, i.e. der reelle projektive Raum der Dimension n.

6. (mündlich) **(a)** Seien Y und X topologische Räume und $p : Y \to X$ eine Überlagerung. Seien weiterhin alle Fasern von p nicht-leer und endlich. Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt und hausdorffsch ist, wenn Y kompakt und hausdorffsch ist.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Gruppenhomomorphismus $\pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$ von der Fundamentalgruppe des Kreises auf sich selbst durch die induzierte Abbildung $\pi_1(\varphi)$ einer Abbildung $\varphi : S^1 \to S^1$ realisiert werden kann.