

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Fachrichtung:

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bei allen Aufgaben sind **begründete Antworten** verlangt. Sie können diese direkt auf das Aufgabenblatt schreiben. (Der Platz sollte hierfür mehr als ausreichen.)
- Die Aufgaben sind nach Themen gruppiert. Die Notenskala wird so berechnet, dass Sie eine Aufgabe als **optional** betrachten (und eventuell weglassen) können.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. Innerhalb einer Aufgabe sind die Fragen oft voneinander unabhängig. (Tipp: Verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine Frage.)
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/10	/12	/12	/12	/10	/69

Nützliche Werte

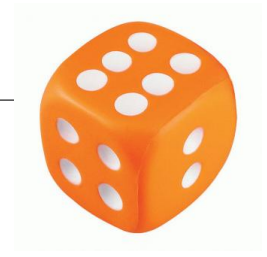
Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	0.90	0.82	0.74	0.67	0.61	0.55	0.50	0.45	0.41	0.37	0.33	0.30	0.27	0.25	0.22	0.20	0.18	0.17	0.15	0.14

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t) dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.49506$.

**Aufgabe 2.** *Verständnisfragen* ($2+2+2+2+2+2 = 12$ Punkte)

Bitte beantworten Sie folgende Fragen mit einer kurzen und überzeugenden Begründung (zum Beispiel durch ein Ergebnis der Vorlesung, eine Rechnung oder ein Gegenbeispiel).

Frage 2A. Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen mit Erwartungswerten $E(X) = E(Y) = 0$. Folgt hieraus $E(X \cdot Y) = 0$?

Begründete Antwort:

Frage 2B. Hat jedes Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{rot}(f) = 0$ ein Potential?

Begründete Antwort:

Frage 2C. Ist die Differentialgleichung $(y + \cos x)y + (2xy + \sin x)y' = 0$ linear? Ist sie exakt?

Begründete Antwort:

Frage 2D. Kann man mit einem Zaun der Länge 12m eine Fläche von 12m^2 umschließen?
Und kann man mit einem Zaun der Länge 13m eine Fläche von 13m^2 umschließen?

Begründete Antwort:

Frage 2E. Sei $W = [-1, 1]^3$ und sei $S = \partial W$ die Würfeloberfläche. Seien $f, g: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorfelder mit $f = \text{rot}(g)$. Welche Werte kann das Flussintegral $\int_S f \bullet dS$ annehmen?

Begründete Antwort:

Frage 2F. Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein quellenfreies Vektorfeld, also $\text{div}(f) = 0$, und rotationssymmetrisch, also $f(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x, y, z)$. Welche Form kann f bzw. g haben?

Begründete Antwort:

Aufgabe 3. *Differentialgleichungen (10 Punkte)*

Lösen Sie die Differentialgleichung $u''(x) + 4u'(x) - 5u(x) = 12e^x$ mit $u(0) = 1$ und $u'(0) = 3$.
(Am Ende die Probe nicht vergessen!)

Rechnung&Lösung:

**Aufgabe 4.** *Wahrscheinlichkeit* ($4+4+4 = 12$ Punkte)

Frage 4A. In der Mensa gibt es Faschingskrapfen (Berliner), von denen jeder mit Wahrscheinlichkeit $1/6$ Senf statt Konfitüre enthält (jeweils unabhängig von den anderen und von außen nicht erkennbar). Angenommen 720 Studenten nehmen einen Krapfen zum Nachtisch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P , dass mindestens 100 Studenten einen Senfkrapfen bekommen: nach Chebychev? nach Approximation durch eine geeignete Normalverteilung? (s. Tabelle S. 2)

Rechnung&Antwort:

Frage 4B. Bei einer Klausur betrachten wir die Ereignisse V „Inhalt verstanden“ und B „Klausur bestanden“. Angenommen, 20% der Klausurteilnehmer haben den Inhalt verstanden, und jeder von ihnen besteht die Klausur mit 100% Wahrscheinlichkeit. Andernfalls ist die Bestehenswahrscheinlichkeit 50%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein (zufällig ausgewählter) Teilnehmer, der die Klausur bestanden hat, den Inhalt verstanden?

Rechnung&Antwort:

Frage 4C. Bisher gab es im deutschen Lotto „6 aus 49“ etwas mehr als 5000 Ziehungen. Bei jeder gibt es $N = \binom{49}{6} \approx 14\,000\,000$ mögliche Ergebnisse. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P , dass bei $n = 5000$ Ziehungen nie zweimal dieselben sechs Zahlen gezogen werden? (Wahrscheinlichkeit in Prozent, auf 1% gerundet, s. Tabelle S. 2 für die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$.)

Rechnung&Antwort:

Aufgabe 5. *Differentialgleichungssysteme* ($4+4+1+3 = 12$ Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Frage 5A. Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren von A ? Zu welchem Eigenwert?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rechnung:

Frage 5B. Welche der folgenden Vektoren sind Hauptvektoren 2. Stufe zum Eigenwert $\lambda = 5$?

$$v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rechnung:

Frage 5C. Bestimmen Sie hieraus eine Basis B des \mathbb{R}^4 aus Eigen- und Hauptvektoren von A .

Basis:

Frage 5D. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes der Differentialgleichung $y' = Ay$.

Basis:

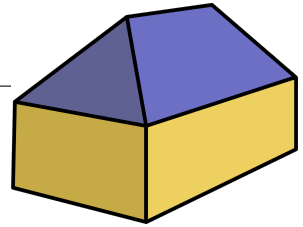
Aufgabe 6. *Fourier-Reihen (4+8 = 12 Punkte)*

Frage 6A Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die ungerade und 2π -periodische Funktion mit $g(x) = \pi - 2x$ für $0 < x < \pi$. Skizzieren Sie g auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$. Welche Werte haben $g(0)$ und $g(\pi)$? Die Fourier-Reihe zu g ist $g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} 2 \sin(2kx)/k$. In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ konvergiert sie gegen $g(x)$? Auf welchen Intervallen ist die Konvergenz gleichmäßig?

Skizze&Antwort:

Frage 6B. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die gerade und 2π -periodische Funktion mit $f(x) = x(\pi - x)$ für $0 \leq x \leq \pi$. Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$. Welche Beziehung besteht zur obigen Funktion g ? Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. Konvergiert diese Reihe in $x = 0$? Welche Identität erhalten Sie durch Auswertung in $x = 0$?

Rechnung&Antwort:

**Aufgabe 7.** *Integration und Integralsätze (2+6+2 = 10 Punkte)*

Über dem Grundriss $G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 2, |y| \leq 1 \}$ beschreibt die Höhe $h: G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = \min\{ x+3, 3-x, y+2, 2-y \}$ ein Walmdach $D = \{ (x, y, h(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in G \}$, wie in der Skizze angedeutet. Wir interessieren uns für den Fluss des Vektorfeldes

$$f(x, y, z) = (xz - x + x^2y, yz - y - xy^2, |y| \cos(xy\pi/2) - (z - 1)^2).$$

Frage 7A. Berechnen Sie die Divergenz von f .

Rechnung&Lösung:

Frage 7B. Berechnen Sie das Flussintegral I_G von f durch den Dachboden $G \times \{1\} = \{ (x, y, 1) \mid (x, y) \in G \}$ nach oben.

Rechnung&Lösung:

Frage 7C. Berechnen Sie das Flussintegral I_D von f durch die Dachfläche D nach außen.

Rechnung&Lösung: