Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Fachrichtung:

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bei allen Aufgaben sind **begründete Antworten** verlangt. Sie können diese direkt auf das Aufgabenblatt schreiben. (Der Platz sollte hierfür mehr als ausreichen.)
- Die Aufgaben sind nach Themen gruppiert. Die Notenskala wird so berechnet, dass Sie eine Aufgabe als **optional** betrachten (und eventuell weglassen) können.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. Innerhalb einer Aufgabe sind die Fragen oft voneinander unabhängig. (Tipp: Verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine Frage.)
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/10	/12	/12	/12	/10	/69

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	0.90	0.82	0.74	0.67	0.61	0.55	0.50	0.45	0.41	0.37	0.33	0.30	0.27	0.25	0.22	0.20	0.18	0.17	0.15	0.14

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen (2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte)*

Bitte beantworten Sie folgende Fragen mit einer kurzen und überzeugenden Begründung (zum Beispiel durch ein Ergebnis der Vorlesung, eine Rechnung oder ein Gegenbeispiel).

Frage 2A. Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen mit Erwartungswerten $E(X) = E(Y) = 0$. Folgt hieraus $E(X \cdot Y) = 0$?

Begründete Antwort: Nein. ▶ Gegenbeispiel: Für $X = Y$ gilt $E(X \cdot Y) = E(X^2) = \mathrm{Var}(X)$. ▶ Für $P(X = 1) = P(X = -1) = 0.5$, zum Beispiel, gilt $E(X) = 0$ aber $E(X^2) = 1$.

Frage 2B. Hat jedes Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{rot}(f) = 0$ ein Potential?

Begründete Antwort: ▶ Dies gilt im Allgemeinen nicht, da $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend ist. ▶ Ein Gegenbeispiel aus Vorlesung und Übung ist $f(x, y) = (-y, x)/(x^2+y^2)$.

Frage 2C. Ist die Differentialgleichung $(y + \cos x)y + (2xy + \sin x)y' = 0$ linear? Ist sie exakt?

Begründete Antwort: ▶ Diese Differentialgleichung ist nicht linear wegen des quadratischen Terms y^2, und ebenso wegen yy'. ▶ Sie ist jedoch exakt, denn $\partial_y(y^2 + y\cos x) = 2y + \cos x$ stimmt überein mit $\partial_x(2xy + \sin x) = 2y + \cos x$.

Frage 2D. Kann man mit einem Zaun der Länge 12m eine Fläche von $12\mathrm{m}^2$ umschließen? Und kann man mit einem Zaun der Länge 13m eine Fläche von $13\mathrm{m}^2$ umschließen?

Begründete Antwort: Nach der isoperimetrischen Ungleichung kann man mit einem Weg der Länge L maximal den Flächeninhalt $L^2/4\pi$ umschließen. (Der Kreis ist optimal.) Es gilt $12 < 4\pi < 13$. ▶ Mit einem Zaun der Länge 12m kann man also höchstens $(12\mathrm{m})^2/4\pi < 12\mathrm{m}^2$ umschließen. ▶ Mit einem Zaun der Länge 13m hingegen erhält man $(13\mathrm{m})^2/4\pi > 13\mathrm{m}^2$.

Frage 2E. Sei $W = [-1,1]^3$ und sei $S = \partial W$ die Würfeloberfläche. Seien $f, g\colon \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder mit $f = \operatorname{rot}(g)$. Welche Werte kann das Flussintegral $\int_S f \bullet \mathrm{d}S$ annehmen?

Begründete Antwort: Nur der Wert 0 ist möglich! ▶ Die Fläche S hat keinen Rand, also $\partial S = \emptyset$. ▶ Nach dem Satz von Stokes gilt $\int_S f \bullet \mathrm{d}S = \int_S \operatorname{rot}(g) \bullet \mathrm{d}S = \int_{\partial S} g \,\mathrm{d}s = 0$.

Frage 2F. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein quellenfreies Vektorfeld, also $\operatorname{div}(f) = 0$, und rotationssymmetrisch, also $f(x,y,z) = g(x^2+y^2+z^2)\cdot(x,y,z)$. Welche Form kann f bzw. g haben?

Begründete Antwort: Nur die Nullfunktion ist möglich! ▶ Für jede Sphäre S vom Radius $r > 0$ gilt nach dem Satz von Gauß $\int_S f \bullet \mathrm{d}S = 0$. ▶ Andererseits gilt wegen der Rotationssymmetrie $\int_S f \bullet \mathrm{d}S = g(r^2)\cdot r \cdot 4\pi r^2$. Also gilt $g(r^2) = 0$ für alle $r > 0$, und somit $f = 0$.

Aufgabe 3. *Differentialgleichungen (10 Punkte)*

Lösen Sie die Differentialgleichung $u''(x) + 4u'(x) - 5u(x) = 12e^x$ mit $u(0) = 1$ und $u'(0) = 3$. (Am Ende die Probe nicht vergessen!)

Rechnung&Lösung:

►► Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda + 5)$
Fundamentalsystem der homogenen Gleichung: $u_1(x) = e^x$ und $u_2 = e^{-5x}$

►► Für die rechte Seite $12e^x$ liegt Resonanz vor.
Ein passender Ansatz ist $u_0(x) = rxe^x$ mit $r \in \mathbb{R}$.

►► Ableiten: $u_0'(x) = rxe^x + re^x$ und $u_0''(x) = rxe^x + 2re^x$
Einsetzen: $(rxe^x + 2re^x) + 4(rxe^x + re^x) - 5(rxe^x) = 6re^x \stackrel{!}{=} 12e^x$, also $u_0(x) = 2xe^x$.

►► Allgemeine Lösung ist $u(x) = u_0(x) + c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Gemäß der Anfangswerte muss $u(0) = c_1 + c_2 = 1$ und $u'(0) = 2 + c_1 - 5c_2 = 3$ gelten.

►► Auflösen liefert $c_1 = 1$ und $c_2 = 0$.
Die gesuchte Lösung ist also $u(x) = (2x + 1)e^x$.

Probe!

(Diese Lösung kann man auch mit der Laplace–Transformation berechnen.)

Aufgabe 4. *Wahrscheinlichkeit (4+4+4 = 12 Punkte)*

Frage 4A. In der Mensa gibt es Faschingskrapfen (Berliner), von denen jeder mit Wahrscheinlichkeit 1/6 Senf statt Konfitüre enthält (jeweils unabhängig von den anderen und von außen nicht erkennbar). Angenommen 720 Studenten nehmen einen Krapfen zum Nachtisch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, dass mindestens 100 Studenten einen Senfkrapfen bekommen: nach Chebychev? nach Approximation durch eine geeignete Normalverteilung? (s. Tabelle S. 2)

Rechnung&Antwort:

▶▶ Erwartungswert $\mu = 720 \cdot \frac{1}{6} = 120$, Varianz $\sigma^2 = 720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 100$, Streuung $\sigma = 10$. Mindestens 100 Studenten enspricht einer Abweichung von höchstens 2σ (nach unten).

▶ Chebychev liefert $1 - P \le 1/4$, also $p \ge 3/4$.

▶ Die Normalverteilung (Tabelle) liefert $P \approx 0.97725$.

Frage 4B. Bei einer Klausur betrachten wir die Ereignisse V „Inhalt verstanden“ und B „Klausur bestanden“. Angenommen, 20% der Klausurteilnehmer haben den Inhalt verstanden, und jeder von ihnen besteht die Klausur mit 100% Wahrscheinlichkeit. Andernfalls ist die Bestehenswahrscheinlichkeit 50%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein (zufällig ausgewählter) Teilnehmer, der die Klausur bestanden hat, den Inhalt verstanden?

Rechnung&Antwort:

▶ Gegeben sind $P(V) = 0.2$, also $P(\overline{V}) = 0.8$, sowie $P(B|V) = 1$ und $P(B|\overline{V}) = 0.5$.

▶▶▶ Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt nach Bayes:

$$P(V|B) = \frac{P(V \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|V) \cdot P(V)}{P(B|V) \cdot P(V) + P(B|\overline{V}) \cdot P(\overline{V})} = \frac{1.0 \cdot 0.2}{1.0 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.8} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}.$$

(Diesen Wert kann man auch an einem geeigneten Mengendiagramm ablesen.)

Frage 4C. Bisher gab es im deutschen Lotto „6 aus 49“ etwas mehr als 5000 Ziehungen. Bei jeder gibt es $N = \binom{49}{6} \approx 14\,000\,000$ mögliche Ergebnisse. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, dass bei $n = 5000$ Ziehungen nie zweimal dieselben sechs Zahlen gezogen werden? (Wahrscheinlichkeit in Prozent, auf 1% gerundet, s. Tabelle S. 2 für die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$.)

Rechnung&Antwort: ►►►► Für die Wahrscheinlichkeit gilt (wie beim Geburtstagsparadox)

$$\begin{aligned} P &= \Big(1 - \frac{0}{N}\Big)\Big(1 - \frac{1}{N}\Big)\Big(1 - \frac{2}{N}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{n-1}{N}\Big) \\ &\approx \exp\Big(-\frac{0}{N}\Big) \exp\Big(-\frac{1}{N}\Big) \exp\Big(-\frac{2}{N}\Big) \cdots \exp\Big(-\frac{n-1}{N}\Big) \\ &\approx \exp\Big(-\frac{0+1+2+\dots+(n-1)}{N}\Big) \approx \exp\Big(-\frac{n(n-1)}{2N}\Big) \\ &\approx \exp(-0.9) \approx 0.41 \quad (\mathit{Tabelle}), \quad \text{also } 41\%. \end{aligned}$$

(Anekdote am Rande: Es wurden tatsächlich schon zweimal die gleichen 6 Zahlen gezogen, Sowohl am 20.12.1986 als auch am 21.06.1995 waren es die Zahlen 15, 25, 27, 30, 42, 48.)

Aufgabe 5. *Differentialgleichungssysteme (4+4+1+3 = 12 Punkte)*

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y' = A\,y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Frage 5A. Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren von A? Zu welchem Eigenwert?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rechnung: ►►►► Durch direktes Ausmultiplizieren findet man:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3v_1$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}v_2$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3v_3$$

$$Av_4 = 3v_4 \qquad \text{denn} \qquad v_4 = \pi v_1 + \sqrt{2} v_3$$

$$Av_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = 5v_5$$

Also sind v_1, v_3, v_4 Eigenvektoren zum Eigenwert 3 und v_5 ist Eigenvektor zum Eigenwert 5.

Frage 5B. Welche der folgenden Vektoren sind Hauptvektoren 2. Stufe zum Eigenwert $\lambda = 5$?

$$v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rechnung: ▶▶▶▶ Durch direktes Ausmultiplizieren mit $M = A - 5E$ findet man:

$$Mv_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad M^2 v_6 \neq 0$$

$$Mv_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_5, \qquad M^2 v_7 = 0$$

$$Mv_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = v_5, \qquad M^2 v_8 = 0$$

Also sind v_7 und v_8 Hauptvektoren 2. Stufe (über v_5) zum Eigenwert $\lambda = 5$, aber v_6 nicht.

Frage 5C. Bestimmen Sie hieraus eine Basis B des $\mathbb{R}^4$ aus Eigen- und Hauptvektoren von A.

Basis: ▶ Die Vektoren (v_1, v_3, v_5, v_7) sind eine mögliche Basis, ebenso (v_1, v_3, v_5, v_8).

Frage 5D. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes der Differentialgleichung $y' = Ay$.

Basis: ▶▶▶ Die Funktionen $e^{3x}v_1$, $e^{3x}v_3$, $e^{5x}v_5$, $e^{5x}(xv_5 + v_7)$ bilden eine Basis.

Aufgabe 6. *Fourier–Reihen (4+8 = 12 Punkte)*

Frage 6A Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die ungerade und 2π–periodische Funktion mit $g(x) = \pi - 2x$ für $0 < x < \pi$. Skizzieren Sie g auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$. Welche Werte haben $g(0)$ und $g(\pi)$? Die Fourier–Reihe zu g ist $g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} 2\sin(2kx)/k$. In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ konvergiert sie gegen $g(x)$? Auf welchen Intervallen ist die Konvergenz gleichmäßig?

Skizze&Antwort:

► Skizze

► Da g ungerade sein soll, muss $g(0) = 0$ gelten, und Periode 2π impliziert $g(\pi) = g(-\pi) = 0$.
Einseitige Grenzwerte und Ableitungen existieren in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$.
Sprungstellen sind $x \in \mathbb{Z}\pi$ und hier gilt $g(x) = (g(x+) + g(x-))/2$.

► Nach dem Satz von Dirichlet konvergiert die Fourier–Reihe in jedem Punkt x gegen $g(x)$.

► Die Konvergenz ist gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall $[a, b] \subset]0, \pi[$.

Frage 6B. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade und 2π–periodische Funktion mit $f(x) = x(\pi - x)$ für $0 \le x \le \pi$. Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$. Welche Beziehung besteht zur obigen Funktion g? Berechnen Sie die reelle Fourier–Reihe $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. Konvergiert diese Reihe in $x = 0$? Welche Identität erhalten Sie durch Auswertung in $x = 0$?

Rechnung&Antwort:

▶ Skizze.

▶ Es gilt $f' = g$ für alle $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}\pi$, also $f = \int g + \text{const}$.

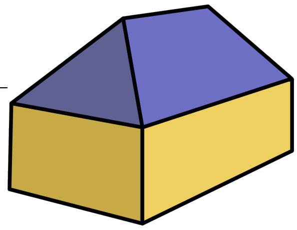
▶ Durch termweise Integration $f(x) \sim a_0/2 - \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2kx)/k^2$.

▶ Zu berechnen bleibt $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi x - x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$

▶ Die Fourier–Reihe ist also $f(x) \sim \pi^2/6 - \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2kx)/k^2$.

▶▶ Die Funktion f ist in 0 stetig und beidseitig ableitbar.
Nach dem Satz von Dirichlet konvergiert die Fourier–Reihe in $x = 0$ gegen $f(0)$.

▶ Auswertung in $x = 0$ liefert $f(0) = 0 = \pi^2/6 - \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$, also $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$.



Aufgabe 7. *Integration und Integralsätze (2+6+2 = 10 Punkte)*

Über dem Grundriss $G = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 2,\ |y| \le 1 \,\}$ beschreibt die Höhe $h\colon G \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = \min\{\, x+3,\ 3-x,\ y+2,\ 2-y \,\}$ ein Walmdach $D = \{\, (x,y,h(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in G \,\}$, wie in der Skizze angedeutet. Wir interessieren uns für den Fluss des Vektorfeldes

$$f(x,y,z) = \bigl(xz - x + x^2y,\ yz - y - xy^2,\ |y|\cos(xy\pi/2) - (z-1)^2\bigr).$$

Frage 7A. Berechnen Sie die Divergenz von f.

Rechnung&Lösung: ▶▶ Die Divergenz verschwindet:

$$\operatorname{div}(f) = (z - 1 + 2xy) + (z - 1 - 2xy) - 2(z-1) = 0$$

Frage 7B. Berechnen Sie das Flussintegral I_G von f durch den Dachboden $G \times \{1\} = \{\, (x,y,1) \mid (x,y) \in G \,\}$ nach oben.

Rechnung&Lösung:

▶ Der Einheitsnormalenvektor an den Dachboden $G \times \{1\}$ nach oben ist $(0,0,1)$.

▶ Das Flussintegral durch $G \times \{1\}$ ist also $I_G = \int_{x=-2}^{2} \int_{y=-1}^{1} |y| \cos(xy\pi/2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

▶▶▶▶ Ausrechnen ergibt

$$\begin{aligned}
I_G &= \int_{x=-2}^{2} \int_{y=-1}^{1} |y|\cos(xy\pi/2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{y=0}^{1} \int_{x=-2}^{2} y\cos(xy\pi/2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{4}{\pi}\int_{y=0}^{1} \Bigl[\sin(xy\pi/2)\Bigr]_{x=-2}^{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{\pi}\int_{y=0}^{1} \sin(\pi y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{\pi^2}\Bigl[-\cos(\pi y)\Bigr]_{y=0}^{1} = \frac{16}{\pi^2}
\end{aligned}$$

Frage 7C. Berechnen Sie das Flussintegral I_D von f durch die Dachfläche D nach außen.

Rechnung&Lösung: ▶▶ Nach dem Satz von Gauß ist das Volumenintegral über $\operatorname{div}(f)$ gleich dem Flussintegral von f über den Rand, hier also $0 = (-I_G) + I_D$, somit $I_G = I_D$. Anders gesagt: f ist quellenfrei, und was über den Dachboden eintritt muss über das Dach raus.