Prüfungsvorbereitungskurs Höhere Mathematik 3

Mehrdimensionale Integration und Integralsätze

Marco Boßle   Jörg Hörner

Mathematik–Online

Frühjahr 2011

Zusammenfassung

Transformationssatz

$$\int_U f(g(x))\,|\det g'(x)|\,dx = \int_{g(U)} f(y)\,dy$$

Parametrisierung

$$\textit{Kurve}\quad C:\ [a,b] \ni t \mapsto \vec{r}\,(t) \qquad \textit{Fläche}\quad S:\ D \ni (u,v) \mapsto \vec{r}\,(u,v)$$

Kurvenintegral

$$\int_C U\,dC = \int_a^b U\big(\vec{r}\,(t)\big)\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

Arbeitsintegral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}\,(t)\big) \cdot \vec{r}\,'(t)\; dt$$

Flächenintegral

$$\iint_S U\, dS = \iint_D U\big(\vec{r}(u,v)\big)\big|\vec{n}(u,v)\big|\, du\, dv\,, \qquad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

Flussintegral

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \;=\; \iint_D \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot \vec{n}(u,v)\, du\, dv\,, \qquad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0\, dS \;=\; \iint_D \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot \frac{\vec{n}(u,v)}{|\vec{n}(u,v)|}\, |\vec{n}(u,v)|\, du\, dv$$

Satz von Gauß

3D: $$\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

2D: $$\iint\limits_A \operatorname{div} \vec{F}\, dA = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{n}\,, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

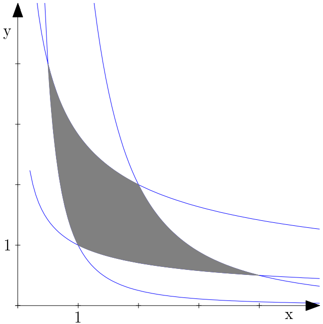
Satz von Stokes

3D: $$\iint\limits_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

2D: $$\iint\limits_A \operatorname{rot} \vec{F}\, dA = \int\limits_C \vec{F} \cdot\, d\vec{r}\,, \quad A \subset \mathbb{R}^2 \quad \textit{(Satz von Green)}$$

Interaktive Aufgabe 493

Gegeben sei die Koordinatentransformation



$$\Phi : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\, e^{q} \\ p\, e^{-2q} \end{pmatrix}$$

und der Bereich

$$D: \; 1 \leq x^2 y \leq 8, \; 1 \leq x y^2 \leq 8.$$

a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation Φ.

b) Beschreiben Sie den Bereich D in $pq-$Koordinaten und skizzieren Sie D in der $pq-$Ebene.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von D.

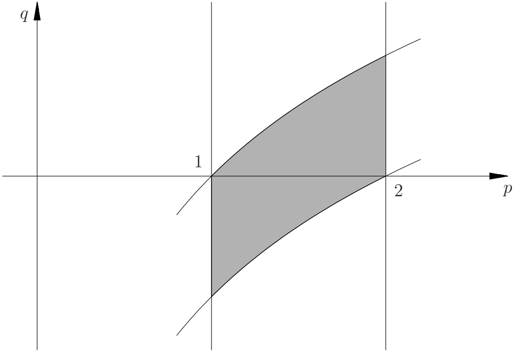
Lösung I493

a) Funktionaldeterminante von Φ

$$\det\begin{pmatrix} x_p & x_q \\ y_p & y_q \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e^q & pe^q \\ e^{-2q} & -2pe^{-2q} \end{pmatrix} = -3pe^{-q}$$

b)

$$\begin{aligned} 1 \leq p^3 \leq 8 \quad &\Rightarrow \quad 1 \leq p \leq 2 \\ 1 \leq p^3 e^{-3q} \leq 8 \quad &\Rightarrow \quad 1 \leq pe^{-q} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \ln(p/2) \leq q \leq \ln p \end{aligned}$$



c) Flächeninhalt von D:

$$A = \iint_D 1 \, dD = \int_1^2 \int_{\ln(p/2)}^{\ln p} \left|-3pe^{-q}\right| \, dq \, dp$$

$$= 3 \int_1^2 p \left(-\frac{1}{p} + \frac{2}{p}\right) dp = 3 \int_1^2 1 \, dp = 3$$

Interaktive Aufgabe 466

Gegeben sei der Körper $\quad K: \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq x, \quad 0 \leq x\,.$

a) Beschreiben Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z).

b) Berechnen Sie das Volumen V des Körpers K.

c) Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes $\vec{F} = (xy^2, yx^2, x^2y^2)^t$ durch die Oberfläche von K von innen nach außen.

Lösung I466

a) Zylinderkoordinaten

$$K: \quad 0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le z \le \rho\cos\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

b) Volumen:

$$\iiint\limits_V 1\, dV = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{\rho\cos\varphi} \rho\, dz\, d\rho\, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi = \frac{2}{3}$$

c) Satz von Gauß: $\Phi = \int\limits_V \operatorname{div}\vec{F}\, dV$, $\quad \operatorname{div}\vec{F} = x^2 + y^2 = \rho^2.$

$$\Phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{\rho\cos\varphi} \rho^3\, dz\, d\rho\, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \rho^4 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi = \frac{2}{5}$$

Interaktive Aufgabe 1647

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \ln(1+z^2) \\ y \arctan x^2 \\ \ln(2+\cos^2 z) \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_{K_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ längs des positiv orientierten Kreises $K_1 : \; x^2 + y^2 = 4, \; z = 3$.

b) Bestimmen Sie den Fluss von rot $\vec{F}$ durch die Kreisscheibe D mit Rand $K_2 \colon x^2 + y^2 = 4, \; z = 0$ nach oben.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluss von rot $\vec{F}$ durch den Zylindermantel $S \colon x^2 + y^2 = 4, \; 0 \le z \le 3$ nach außen.

Lösung I1647

a)

- Parametrisierung des Kreises $K_1 \colon x^2 + y^2 = 4,\ z = 3$

$$\begin{aligned} \vec{P}_1(t) &= \left(2\cos t, 2\sin t, 3\right)^{\mathrm{t}}, \\ \vec{P}_1'(t) &= \left(-2\sin t, 2\cos t, 0\right)^{\mathrm{t}}, \quad 0 \le t \le 2\pi \end{aligned}$$

- Einsetzen

$$\begin{aligned} \int\limits_{K_1} \vec{F}\, d\vec{r} &= \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\ln 10 \sin t \\ 2\sin t \arctan(4\cos^2 t) \\ \ln(2+\cos^2 3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= -4\ln 10 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt + 4 \int\limits_0^{2\pi} \underbrace{\sin t \cos t \arctan(4\cos^2 t)}_{=g(t)}\, dt \end{aligned}$$

- g ist 2π-periodisch und punktsymmetrisch

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,dt \overset{2\pi\text{-periodisch}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt \overset{\text{Punktsymmetrie}}{=} 0$$

- Partielle Integration

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 t\,dt &= -\sin t\cos t + \int \cos^2 t\,dt \\
= -\sin t\cos t + \int (1-\sin^2 t)\,dt &= -\sin t\cos t + t - \int \sin^2 t\,dt \\
\Rightarrow \quad \int \sin^2 t\,dt &= \frac{1}{2}\big(t - \sin t\cos t\big) + C
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_{K_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -2\ln 10\,\big[t - \sin t\cos t\big]_0^{2\pi} = -4\pi\ln 10 \approx -28.9351$$

b)

- Satz von Stokes ergibt

$$\int_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{K_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}\,.$$

- Parametrisierung des Kreises $K_2 :\; x^2 + y^2 = 4,\; z = 0$

$$\begin{aligned} \vec{P}_2(t) &= \left(2\cos t, 2\sin t, 0\right)^{\mathrm{t}}, \\ \vec{P}_2'(t) &= \left(-2\sin t, 2\cos t, 0\right)^{\mathrm{t}}, \quad 0 \le t \le 2\pi \end{aligned}$$

- Einsetzen

$$\begin{aligned} \int_{K_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin t \arctan(4\cos^2 t) \\ \ln 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \arctan(4\cos^2 t)\, dt \overset{\text{Teil a)}}{=} 0 \end{aligned}$$

- Insgesamt

$$\int\limits_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0$$

c)

Bezeichne Z das Innere des Zylinders und D' den oberen Deckel.

- Satz von Gauß und $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$ ergibt

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_Z \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F})\,dV = \int_{\partial Z} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{A} \\
&= \int_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{A} + \int_D \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{A} + \int_{D'} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{A} \\
&\overset{b)}{=} \int_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{A} + 0 + \int_{D'} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{A} \\
&\overset{\text{Stokes}}{=} \int_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{A} + \int_{K_1} \vec{F}\,d\vec{r} \\
&\overset{a)}{=} \int_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{A} - 4\pi\ln 10
\end{aligned}
$$

- Der Fluß durch S ist gegeben durch

$$\int\limits_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 4\pi \ln 10 \,.$$