Prüfungsvorbereitungskurs Höhere Mathematik 3

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Marco Boßle   Jörg Hörner

Mathematik–Online

Frühjahr 2011

Zusammenfassung

$$y'(x) = F(x, y) \qquad \text{Allgemeine Form (DGL 1.Ordnung)}$$

Spezielle Typen

- Lineare DGL

$$y' = f(x)\, y + g(x)$$

  - Allgemeine Lösung ($F' = f$)

$$y(x) = e^{F(x)}\Big(C + \int g(x)e^{-F(x)}\, dx\Big)\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

- Separable DGL

$$y' = f(x)\,g(y)$$

  - Bestimme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

  - Löse nach y auf

- Exakte DGL

$$p(x,y) + q(x,y)y' = 0 \qquad \text{mit} \qquad \partial_y p = \partial_x q$$

  - Finde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} F = (\partial_x F, \partial_y F) = (p, q)$$

  - Löse

$$F(x,y) = C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

    nach y auf

Zusammenfassung

DGL 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$$

- Allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

  - Homogene Lösung y_h zu

$$y_h''(x) + ay_h'(x) + by_h(x) = 0$$

  - Partikuläre Lösung y_p

$$y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x) = f(x)$$

Allgemeines Vorgehen für die homogene Gleichung

$$y''(x) + ay'(x) + by = 0$$

- Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

  - Zwei reelle Nullstellen $\lambda_{1,2}$

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

  - Eine doppelte reelle Nullstelle λ

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

  - Zwei komplexe Nullstellen $\lambda_{1,2} = \gamma \pm \mathrm{i}\omega$

$$y(x) = e^{\gamma x}\big(c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x)\big)$$

Bestimmung der partikulären Lösung y_p durch Variation der Konstanten

- Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$$\left\{u_1(x)\,,\; u_2(x)\right\}$$

- Ansatz

$$y_p(x) = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x)$$

- Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Bestimmung der partikulären Lösung y_p durch spezielle Ansätze

- $f(x) = e^{\gamma x}(a\sin(\omega x) + b\cos(\omega t))$:
  - Ansatz
    $$y_p(x) = e^{\gamma x}\big(a_1\sin(\omega x) + a_2\cos(\omega x)\big)$$
  - In die Gleichung einsetzen und durch Koeffizientenvergleich a_1 und a_2 bestimmen
  - Sind $\gamma \pm \mathrm{i}\omega$ Nullstellen von $\chi(\lambda)$ (Resonanz)
    $$y_p(x) = e^{\gamma x}x\big(a_1\sin(\omega x) + a_2\cos(\omega x)$$

- $f(x) = p(x)e^{\gamma x}$, wobei $p(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n$ ein Polynom:
  - Ansatz

$$y_p(x) = e^{\gamma x} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

  - In die Gleichung einsetzen und durch Koeffizientenvergleich a_n bestimmen
  - Ist γ eine k-fache reelle Nullstelle von $\chi(\lambda)$ (Resonanz)

$$y_p(x) = x^k e^{\gamma x} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

Interaktive Aufgabe 326

Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ folgender Differentialgleichungen

a) $y' = \dfrac{xy^2}{1+x^2},\ y(0) = 1$

b) $y'(2y+x) + y = 0,\ y(0) = a > 0$

c) $y' + 2y = \cos x,\ y(0) = y(2\pi)$

Lösung I326

Teil a)

- Die DGL

$$y' = y^2 \cdot \frac{x}{1+x^2}$$

ist separabel.

Erinnerung (Trennung der Variablen)

Form:

$$y' = f(x)g(y)$$

Allgemeine Lösung:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

und anschließendes Auflösen nach y.

- Bestimmung der Stammfunktion von $1/g$

$$\int y^{-2}\,dy = -y^{-1}$$

- Bestimmung der Stammfunktion von f

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C \end{aligned}$$

- Einsetzen und Auflösen nach y

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y} &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C \\ \Leftrightarrow \qquad y(x) &= -\frac{2}{\ln(x^2+1)+2C} \end{aligned}$$

- $y(0) = 1$ impliziert

$$1 \stackrel{!}{=} -\frac{2}{\ln(0^2+1)+2C} = -\frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

- Insgesamt

$$y(x) = -\frac{2}{\ln(x^2+1)-2}$$

Teil b)

- Die DGL

$$y'(2y+x)+y=0$$

ist exakt, da

$$\partial_x(2y+x)=1=\partial_y y$$

Erinnerung (Exakte DGL)

Form:

$$p(x,y)+q(x,y)y'=0\,,\quad \partial_y p=\partial_x q$$

Allgemeine Lösung:

$$F(x,y)=C \quad \text{mit} \quad \partial_x F=p,\ \partial_y F=q,\ C\in\mathbb{R}$$

und anschließendes Auflösen nach y.

- Bestimmung von F

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int(2y+x)\,dy = y^2+xy+K(x) \\ \Rightarrow \quad \partial_x F &= y+K'(x) \stackrel{!}{=} y \quad \Rightarrow \quad K(x)=0 \end{aligned}$$

- Allgemeine Form

$$y^2 + xy = C \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + C}$$

- $y(0) = a > 0$ impliziert

$$a \overset{!}{=} -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0^2}{4} + C} = \pm\sqrt{C} \quad \Rightarrow \quad C = a^2$$

- Wegen $a > 0$ ergibt sich insgesamt

$$y(x) = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + a^2}$$

Teil c)

- Die DGL

$$y' + 2y = \cos(x)$$

ist lineare DGL 1.Ordnung.

Erinnerung (Lineare DGL 1.Ordnung)

Form:

$$y' = f(x)y + h(x)$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = e^{F(x)}\left(C + \int h(x)e^{-F(x)}\,dx\right), \quad C \in \mathbb{R}$$

mit $F'(x) = f(x)$

- Offensichtlich gilt

$$F(x) = -2x \quad \rightarrow \quad e^{F(x)} = e^{-2x}$$

- Bestimmung der Stammfunktion von $h(x)\exp(-F(x))$ durch zweimalige partielle Integration

$$\int \cos(x)e^{2x}\,dx = e^{2x}\left(\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x)\right)$$

- Einsetzen

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-2x}\left(C + e^{2x}\left(\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x)\right)\right) \\ &= Ce^{-2x} + \frac{1}{5}\sin(x) + \frac{2}{5}\cos(x) \end{aligned}$$

- $y(0) = y(2\pi)$ impliziert

$$Ce^{-2\cdot 2\pi} \stackrel{!}{=} Ce^{-2\cdot 0} \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Insgesamt

$$y(x) = \frac{1}{5}\sin(x) + \frac{2}{5}\cos(x)$$

Interaktive Aufgabe 655

Gegeben sei die von dem reellen Parameter α abhängige Differentialgleichung

$$u'' - (1+\alpha)u' + \alpha u = f(t)\ .$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u(t)$ der homogenen Differentialgleichung ($f(t) = 0$) in Abhängigkeit von α.

b) Berechnen Sie im Fall $\alpha = 0$ die allgemeine Lösung für $f(t) = 4\cos t$. Für welche Anfangswerte von $u(0)$ und $u'(0)$ ist diese Lösung auf $[0, \infty)$ beschränkt?

Lösung I655

Teil a)
Homogene Gleichung

$$u'' - (1+\alpha)u' + \alpha u = 0$$

- Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (1+\alpha)\lambda + \alpha &\overset{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1+\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+\alpha)^2}{4} - \alpha} &= \frac{1+\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-\alpha)^2}{4}} \\ &= \frac{1+\alpha}{2} \pm \frac{1-\alpha}{2} \end{aligned}$$

- $\alpha = 1 \rightsquigarrow$ Doppelte Nullstelle $\lambda = 1$

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- $\alpha \neq 1 \rightsquigarrow$ Zwei reelle Nullstelle $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \alpha$

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{\alpha\, t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Teil b)

Homogene Lösung $u_h(t)$ für $\alpha = 0$

$$u_h(t) = c_1 e^t + c_2$$

- Rechte Seite: $4\cos(x)$
  $\rightsquigarrow$ Keine Resonanz
- Ansatz

$$u_p(t) = a_1 \sin(t) + a_2 \cos(t)$$

- Ableitungen

$$\begin{aligned} u_p''(t) &= -a_1 \sin(t) - a_2 \cos(t) \\ u_p'(t) &= a_1 \cos(t) - a_2 \sin(t) \end{aligned}$$

- Einsetzen

$$\begin{aligned} u_p''(t) - u_p'(t) &= -a_1 \sin(t) - a_2 \cos(t) - a_1 \cos(t) + a_2 \sin(t) \\ &= (a_2 - a_1) \sin(t) - (a_1 + a_2) \cos(t) \\ &\overset{!}{=} 4 \cos(t) \end{aligned}$$

- Koeffizientenvergleich

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = -4 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = a_2 = -2$$

- Partikuläre Lösung

$$u_p(t) = -2 \sin(t) - 2 \cos(t)$$

- Allgemeine Lösung

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = c_1 e^t + c_2 - 2 \sin(t) - 2 \cos(t) \,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$e^t \xrightarrow{t\to\infty} \infty$$

$\rightsquigarrow$ Die Lösung bleibt beschränkt, genau dann wenn

$$c_1 = 0$$

$\rightsquigarrow$ $u'(0) = c_1 - 2 \stackrel{!}{=} 0 - 2$

Die Lösung $u(t)$ bleibt genau dann beschränkt, wenn

$$u'(0) = -2$$

$u(0)$ kann beliebig gewählt werden

Aufgabe 3 (A661)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$1 + xy = (x^2 + x^3 y)y', \qquad x > 0.$$

Ermitteln Sie dazu einen integrierenden Faktor mit einem möglichst einfachen Ansatz ($\mu = \mu(x)$ oder $\mu = \mu(y)$).

Lösung

Erinnerung

$\mu = \mu(x, y)$ heißt **integrierender Faktor** *zur DGL*

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0\,,$$

wenn die DGL

$$\mu(x, y)f(x, y) + \mu(x, y)g(x, y)y' = 0$$

exakt ist.

Ansatz	*Bedingung an μ*
$\mu = \mu(x)$	$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial_y f - \partial_x g}{g}$ *hängt nur von x ab*
$\mu = \mu(y)$	$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-\partial_y f + \partial_x g}{f}$ *hängt nur von y ab*

Für die Differentialgleichung

$$1 + xy = (x^2 + x^3 y)y'$$

ist

$$f(x, y) = 1 + xy \quad \text{und} \quad g(x, y) = -x^2 - x^3 y$$

- Ansatz $\mu = \mu(y)$:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-\partial_y f + \partial_x g}{f} = \frac{-x - 2x - 3x^2 y}{1 + xy} = -3x\frac{1 + xy}{1 + xy} = -3x$$

nicht abhängig von y
$\rightsquigarrow$ Kein integrierender Faktor

- Ansatz $\mu = \mu(x)$:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial_y f - \partial_x g}{g} = \frac{x + 2x + 3x^2 y}{-x^2 - x^3 y} = \frac{3(x + x^2 y)}{-x(x + x^2 y)} = -\frac{3}{x}$$

nur abhängig von x
$\rightsquigarrow$ $\mu = \mu(x)$ ist integrierender Faktor

- Bestimmung von $\mu(x)$

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln(\mu) = -3\ln(x) = \ln(x^{-3})$$
$$\Rightarrow \quad \mu(x) = \frac{1}{x^3}$$

- Bestimmung einer Funktion F mit grad $F = (\mu f, \mu g)$
  - Integration von μg

$$F(x,y) = \int \mu(x) g(x,y)\,dy = -\int \frac{1}{x} + y\,dy = -\frac{y}{x} - \frac{y^2}{2} + K(x)$$

  - Koeffizientenvergleich

$$\partial_x F = \frac{y}{x^2} + K'(x) \stackrel{!}{=} \mu(x) f(x,y) = \frac{1}{x^3} + \frac{y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad K'(x) = \frac{1}{x^3}$$

- Damit $K(x) = -\frac{1}{2x^2}$ bzw.

$$F(x,y) = -\frac{y}{x} - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{2}\left(y^2 + 2\frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{x}\right)^2$$

- Auflösen von $F(x,y) = C$ nach y

$$-\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{x}\right)^2 = C \quad \Leftrightarrow \quad \left(y + \frac{1}{x}\right)^2 = \underbrace{-2C}_{=c^2}$$

- Insgesamt

$$\boxed{y(x) = c - \frac{1}{x}}$$