Prüfungsvorbereitungskurs Höhere Mathematik 3

Fourier-Reihen

Marco Boßle   Jörg Hörner

Mathematik–Online

Frühjahr 2011

Zusammenfassung

Reelle Fourier-Reihe: f: T-periodische Funktion, $\omega = 2\pi/T$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \Big) \quad \text{mit}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt\,, \quad k > 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt\,, \quad k \geq 1$$

Speziell: f: 2π-periodische Funktion $\Rightarrow \omega = 1$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big) \quad \text{mit}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt\,, \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt\,, \quad k \geq 1$$

periodisch fortgesetzte Funktion:
$\Rightarrow$ richtige Definition von f, ggf. Integrationsintervall verschieben.

Komplexe Fourier-Reihe: f: 2π-periodisch

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\mathrm{i}kt} \, dt$$

Umrechnungsformeln für Fourier-Koeffizienten:

$$a_0 = 2c_0 \,, \quad a_k = c_k + c_{-k} \,, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geq 1$$

$$c_0 = a_0/2 \,, \quad c_k = (a_k - \mathrm{i}b_k)/2 \,, \quad c_{-k} = (a_k + \mathrm{i}b_k)/2 \quad \text{für } k \geq 1$$

Parseval-Identität:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Symmetrien:

f gerade: $\quad b_k = 0, \quad a_k = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos(kt)\,dt, \quad c_k = c_{-k}$

f ungerade: $\quad a_k = 0, \quad b_k = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(kt)\,dt, \quad c_k = -c_{-k}$

Differentiation: Koeffizienten $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ für f':

$$\tilde{a}_0 = 0\,, \quad \tilde{a}_k = \omega k b_k\,, \quad \tilde{b}_k = -\omega k a_k\,, \quad k \geq 1$$

Integration: (falls $a_0 = 0$)
Koeffizienten $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ für eine Stammfunktion (Integrationskonstante $\tilde{a}_0$):

$$\tilde{a}_k = -\frac{1}{\omega k} b_k\,, \quad \tilde{b}_k = \frac{1}{\omega k} a_k\,, \quad k \geq 1$$

Spezielle Stammfunktion: $\tilde{a}_0$ durch Punktprobe oder Integration

Konvergenz:

- f stetig differenzierbar auf Intervallen $(x_\ell, x_{\ell+1})$
- An Intervallgrenzen existieren Grenzwerte:

$$f_\ell^+ = \lim_{x \to x_\ell +} f(x), \quad f_\ell^- = \lim_{x \to x_\ell -} f(x)$$

$\Rightarrow$ Fourier-Reihe konvergiert gegen

$$f(x) \text{ für } x \in (x_\ell, x_{\ell+1})\,, \qquad (f_\ell^+ + f_\ell^-)/2 \text{ für } x_\ell$$

Aufgabe

Entwickeln Sie die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion
$f(x) = \cos(x/3)\,,\ x \in [-\pi, \pi)$ in eine Fourier-Reihe

$$f(x) \sim c + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

und bestimmen Sie durch Auswertung an einer geeigneten Stelle

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 - 1}\,.$$

Lösung

$f(x) = \cos(x/3)\,, \quad x \in [-\pi, \pi)$
Prüfung auf Symmetrie:

$$f(-x) = \cos(-x/3) = \cos(x/3) = f(x)$$

$$\Rightarrow \text{ gerade Funktion } \Rightarrow b_k = 0\,,\ k > 0\,.$$

$$c = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/3)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(x/3)\,dx = \frac{3}{\pi}\left[\sin(x/3)\right]_0^{\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x/3)\,\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{2}{k\pi}\underbrace{\left[\cos(x/3)\sin(kx)\right]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{3k\pi}\int_0^{\pi} \sin(x/3)\sin(kx)\,dx \\
&= \frac{-2}{3k^2\pi}\left[\sin(x/3)\cos(kx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{9k^2}\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x/3)\cos(kx)\,dx}_{a_k}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow a_k = \frac{1}{1-\frac{1}{9k^2}}\,\frac{-2}{3k^2\pi}\sin(\pi/3)(-1)^k = \frac{3\sqrt{3}(-1)^{k+1}}{\pi(9k^2-1)}
$$

Also ist

$$f(x) \sim \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{3}(-1)^{k+1}}{\pi(9k^2-1)} \cos(kx)$$

Gesuchter Reihenwert:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2-1}\,.$$

Geeignete Stelle $x = \pi$:
f stetig an π, daher konvergiert Fourier-Reihe gegen Funktionswert

$$\begin{aligned} f(\pi) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2} \quad &= \quad \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{3}(-1)^{k+1}}{\pi(9k^2-1)} (-1)^k \\ &= \quad \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2-1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - 1/2 \right) = \frac{9-\sqrt{3}\pi}{18}$$

Aufgabe Probeklausur

Bestimmen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

von $f(x) = x(\pi - |x|),\ |x| \le \pi$. Geben Sie ebenfalls die Koeffizienten $\tilde{a}_k$ und $\tilde{b}_k$ der Stammfunktion $\int_0^x f(y)dy$ an.

Lösung

Nebenrechnung partielle Integration:

$$\int_0^\pi x(\pi - x))\sin(kx)\,dx \;=$$

$$\underbrace{\left[x(\pi - x)\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_0^\pi}_{=0} \;-\; \int_0^\pi (\pi - 2x)\frac{-\cos(kx)}{k}\,dx =$$

$$\underbrace{\left[(\pi - 2x)\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_0^\pi}_{=0} \;-\; \int_0^\pi -2\frac{\sin(kx)}{k^2}\,dx =$$

$$\left[-2\frac{\cos(kx)}{k^3}\right]_0^\pi \;=\; \frac{2}{k^3}(1 - (-1)^k)$$

Reelle Fourier-Reihe von $f(x) = x(\pi - |x|),\ |x| \leq \pi$

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \text{ ungerade Funktion } \Rightarrow a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x)) \sin(kx)\, dx = \frac{4}{\pi k^3}(1 - (-1)^k)$$

Integration:

$$\tilde{a}_k = -\frac{1}{k} b_k = \frac{4}{\pi k^4}((-1)^k - 1)\,, \quad \tilde{b}_k = \frac{1}{k} a_k = 0\,, \quad k \geq 1$$

Berechnung von $\tilde{a}_0$ (gerade Funktion):

$$x \geq 0 : g(x) = \int_0^x y(\pi - y)\, dy = \frac{\pi}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3$$

$$\tilde{a}_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3\, dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\pi^3}{3} - \frac{1}{3} \frac{\pi^4}{4} \right) = \frac{\pi^3}{6}$$