Prüfungsvorbereitungskurs Höhere Mathematik 3

Differentialgleichungssysteme

Marco Boßle Jörg Hörner

Mathematik–Online

Frühjahr 2011

Zusammenfassung

Allgemeine Differentialgleichungssysteme 1.Ordnung

Sei $\vec{F} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\vec{u}'(x) = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ \vdots \\ u'n(x) \end{pmatrix} = \vec{F}(x, \vec{u}(x)) = \begin{pmatrix} F_1(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) \\ \vdots \\ F_n(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) \end{pmatrix}$$

Differentialgleichungssystem 1.Ordnung für die Funktion $\vec{u}$.

Transformation von Differentialgleichungen auf Systeme

- Jede Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = F(x, y^{(n-1)}, \ldots, y', y)$$

  kann in ein äquivalentes System von n Gleichungen erster Ordnung überführt werden.

- Für $\vec{u}(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ setze

$$u_1 = y, \quad u_2 = y', \quad \ldots, \quad u_n = y^{(n-1)}$$

- Einsetzen

$$\begin{aligned} u_1' &= y' = u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ \vdots & \quad \vdots \\ u_n' &= F(x, u_n, \ldots u_1) \end{aligned}$$

Lineares homogenes Differentialgleichungssystem 1.Ordnung

$$\vec{u}'(x) = A\vec{u}(x)$$

mit $\vec{u}(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ und $n \times n$-Matrix A.

Allgemeines Vorgehen

- Bestimme die Eigenwerte (reell und komplex) der Matrix A

- Sind alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ verschieden
  - Bestimme die Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$
  - Komplexes Fundamentalsystem

$$\left\{ \vec{v}_1 e^{\lambda_1 x} \, , \, \ldots \, , \, \vec{v}_n e^{\lambda_n x} \right\}$$

  - Reelles Fundamentalsystem durch Real- und Imaginärteil bilden.
    - ★ λ_i reell $\quad \Rightarrow \quad v_i e^{\lambda_i x}$ ist reell
    - ★ λ_i komplex
      Wenn A reell ist, ist auch $\bar{\lambda}_i$ Eigenwert und $\bar{v}_i$ Eigenvektor
      Reelle Lösungen sind:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(v_i e^{\lambda_i x} + \bar{v}_i e^{\bar{\lambda}_i x}\right) &=& \quad \mathrm{Re}(v_i e^{\lambda_i x}) \\ \text{und} \qquad & \frac{1}{2i}\left(v_i e^{\lambda_i x} - \bar{v}_i e^{\bar{\lambda}_i x}\right) &=& \quad \mathrm{Im}(v_i e^{\lambda_i x}) \end{aligned}$$

- λ ist k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms mit Dimension des Eigenraums gleich k
  - Wähle Basis des Eigenraums

$$\left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\right\}$$

  - Komplexes Fundamentalsystem zu λ

$$\left\{\vec{b}_1 e^{\lambda x}, \ldots, \vec{b}_k e^{\lambda x}\right\}$$

  - Reelles Fundamentalsystem durch Real- und Imaginärteil bilden.
- λ ist k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms mit Dimension des Eigenraums ungleich k

  $\Rightarrow$ A ist nicht diagonalisierbar

  $\Rightarrow$ Lösung mit speziellen Verfahren

Lineares inhomogenes Differentialgleichungssystem 1.Ordnung

$$\vec{u}'(x) = A\vec{u}(x) + b(x)$$

mit $\vec{u}(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ und $n \times n$-Matrix A.

Lösung mit speziellen Verfahren

- Transformation auf Jordan-Form
- Rückwärtseinsetzen
- Variation der Konstanten

Klausuraufgabe Harbrecht F10

a) Transformieren Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'''(x) - 5y''(x) + 2y(x) = 3x$$

auf ein System erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 4xe^{2x} + 16\sin(2x)\,.$$

Lösung

a)

$$y'''(x) - 5y''(x) + 2y(x) = 3x$$

- Setze

$$u_1 = y, \quad u_2 = y', \quad u_3 = y''$$

- Mit $\vec{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^{\mathrm{t}}$

$$\vec{u}'(x) = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ u_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x \end{pmatrix}$$

Interaktive Aufgabe 654

Bestimmen Sie für das Differentialgleichungssystem

$$u' = Au\,, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) die Eigenwerte und Eigenvektoren von A,

b) die allgemeine Lösung $u(t) = \big(u_1(t), u_2(t), u_3(t)\big)^{\mathrm{t}}$,

c) die Lösung mit $u(0) = (1, 0, 0)^{\mathrm{t}}$.

Lösung I654

a) Eigenwerte

$\det(A-\lambda E) = (-\lambda)^3+\lambda+\lambda = \lambda(2-\lambda^2) \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ ist $v_1 = (0, -1, 1)^t$.
Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = \sqrt{2}$:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A reell und symmetrisch, orthogonale Ergänzung: $v_3 = (-\sqrt{2}, 1, 1)^t$

b)

$$u(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\sqrt{2}t} + c_3 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t}$$

c)

$$u(0) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad c_1 = 0,\ c_2 = -c_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad u(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}) \\ e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t} \\ e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cosh(\sqrt{2}t) \\ \sinh(\sqrt{2}t) \\ \sinh(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

Klausuraufgabe Harbrecht F10

a) Bestimmen Sie die allgemeine komplexe und die allgemeine reelle Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y'(x) = Ay(x)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} .$$

b) Bestimmen Sie die reelle Lösung zu dem Anfangswert

$$y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Lösung

a)

- Eigenwerte (Nullstellen des charakteristischen Polynoms)

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda - 1 & -1 \\ 4 & -\lambda - 1 \end{pmatrix} = (-\lambda - 1)^2 + 4 \\
&= \lambda^2 + 2\lambda + 5 \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} &= -1 \pm 2\mathrm{i}
\end{aligned}$$

- Eigenvektoren (bis auf Vielfaches (!))

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & -1 \\ 4 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

A ist reell

$$\Rightarrow \qquad v_2 = \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

- Komplexes Fundamentalsystem

$$\left\{ e^{(-1+2\mathrm{i})x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} , \; e^{(-1-2\mathrm{i})x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}$$

Allgemeine komplexe Lösung

$$y(x) = c_1 e^{(-1+2\mathrm{i})x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} + c_2 e^{(-1-2\mathrm{i})x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} , \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

- Reelle Lösung durch Real- und Imaginärteilbildung

$$
\begin{aligned}
e^{(-1+2\mathrm{i})x}\begin{pmatrix}1\\-2\mathrm{i}\end{pmatrix} &= e^{-x}\begin{pmatrix}\cos(2x)+\mathrm{i}\sin 2x\\-2\mathrm{i}(\cos(2x)+\mathrm{i}\sin 2x)\end{pmatrix}\\
&= e^{-x}\begin{pmatrix}\cos(2x)+\mathrm{i}\sin 2x\\2\sin(2x)-\mathrm{i}2\cos(2x)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow$ Reelles Fundamentalsystem

$$
\left\{e^{-x}\begin{pmatrix}\cos(2x)\\2\sin(2x)\end{pmatrix}, e^{-x}\begin{pmatrix}\sin(2x)\\-2\cos(2x)\end{pmatrix}\right\}
$$

Allgemeine reelle Lösung

$$
y(x) = a_1 e^{-x}\begin{pmatrix}\cos(2x)\\2\sin(2x)\end{pmatrix} + a_2 e^{-x}\begin{pmatrix}\sin(2x)\\-2\cos(2x)\end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}
$$

b)

$$y(x) = a_1 e^{-x} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ 2\sin(2x) \end{pmatrix} + a_2 e^{-x} \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ -2\cos(2x) \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Anfangsbedingungen $y(0) = (2, 2)^{\mathrm{t}}$ einsetzen

$$\begin{aligned} y(0) &= a_1 e^{-0} \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot 0) \\ 2\sin(2 \cdot 0) \end{pmatrix} + a_2 e^{-0} \begin{pmatrix} \sin(2 \cdot 0) \\ -2\cos(2 \cdot 0) \end{pmatrix} \\ &= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad & a_1 = 2, a_2 = -1 \end{aligned}$$

Spezielle Lösung

$$y(x) = 2e^{-x} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ 2\sin(2x) \end{pmatrix} - e^{-x} \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ -2\cos(2x) \end{pmatrix}$$