Prüfungsvorbereitungskurs Höhere Mathematik 3

Funktionentheorie

Marco Boßle   Jörg Hörner

Mathematik–Online

Frühjahr 2011

Zusammenfassung – Grundlagen

Komplexe Funktion

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)\,, \quad z = x + \mathrm{i}y = re^{\mathrm{i}\varphi}$$

Exponentialfunktion

$$e^z = e^x\,(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Komplexer Logarithmus

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + \mathrm{i}(\varphi + 2\pi k)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Zusammenfassung – Differentiation

Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

f komplex differenzierbar:
$f'(z) = f_x(z) = -\mathrm{i}f_y(z) \quad \Leftrightarrow \quad u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x$
$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$

Isotropie und Winkeltreue

Abbildung $z \mapsto w(z)$
dreht Richtungen um Winkel $\arg f'(z)$
streckt Längen um Faktor $|f'(z)|$
Orthogonalität krummliniger Gitter bleibt erhalten

Zusammenfassung – Integration

Kurvenintegral

$$\int_C f\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt\,, \quad C:\ t \mapsto z(t)\,,\ t \in [a,b]$$

Stammfunktion

f im Gebiet D komplex differenzierbar, C ein in D verlaufender Weg von z_0 nach z_1:

$$\int_C f'\,dz = f(z_1) - f(z_0) = [f]_{z_0}^{z_1}$$

Cauchys Theorem

f analytisch in D bis auf endlich viele schwache (hebbare) Singularitäten, $C \subset D$ geschlossene Kurve, homotop zu einem Punkt:

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 0$$

Cauchysche Integralformel

f analytisch $$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Integralformel für Ableitungen

f analytisch $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

Mittelwerteigenschaft

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathrm{i}t})\, dt$$

Maximumprinzip

$$\max_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)|$$

Zusammenfassung – Potenzreihen

Taylor-Reihe

f analytisch in D : $|z-a| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n\,, \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Konvergenzradius r: Abstand zur nächsten Singularität

$$r = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

Laurent-Reihe

f analytisch in D : $r_1 < |z-a| < r_2$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\,, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$$

Konvergenzgebiet: maximaler Kreisring um a ohne Singularitäten

r_1, r_2*: Abstand der begrenzenden Singularitäten zu a*

$$r_1 = \overline{\lim_{n\to-\infty}} |c_n|^{-1/n}\,, \quad r_2 = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

Zusammenfassung – Residuum

Residuum

f analytisch in $D \setminus \{a\}$,
$C \subset D$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um a

$$\operatorname*{Res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C f(z)\, dz$$

einfache Polstelle: $$\operatorname*{Res}_a f = \lim_{z\to a} (z-a) f(z)$$

Pol n-ter Ordnung:

$$\operatorname*{Res}_a f = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \Big((z-a)^n f(z)\Big)$$

Residuensatz

C entgegen dem Uhrzeigersinn orientierter Rand eines beschränkten Gebietes D, a_j Singularitäten von f in D:

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_j \operatorname*{Res}_{a_j} f$$

Klausuraufgabe Griesemer H09

Für welche $\alpha > 0$ ist

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + \alpha y^2) \qquad x < 0, y \in \mathbb{R}$$

Realteil einer analytischen Funktion $f = u + \mathrm{i}v$?
Bestimmen Sie für diese α die Funktion v in Abhängigkeit von x und y.

Lösung

Erinnerung

Eine Funktion $u : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann Realteil einer analytischen Funktion $f = u + iv$ auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$, wenn u eine harmonische Funktion auf G ist, d.h. es gilt

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \qquad \textit{für alle } x, y \in G.$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + \alpha y^2)$$

- Berechnung der Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 u &= \partial_x\left[\frac{x}{x^2+\alpha y^2}\right] = \frac{x^2+\alpha y^2 - 2x^2}{(x^2+\alpha y^2)^2} = \frac{-x^2+\alpha y^2}{(x^2+\alpha y^2)^2} \\
\partial_y^2 u &= \partial_y\left[\frac{\alpha y}{x^2+\alpha y^2}\right] = \frac{\alpha x^2+\alpha^2 y^2 - 2\alpha^2 y^2}{(x^2+\alpha y^2)^2} = \frac{\alpha x^2-\alpha^2 y^2}{(x^2+\alpha y^2)^2}
\end{aligned}$$

- Bestimmung von α:

$$0 \stackrel{!}{=} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \frac{(\alpha-1)x^2 + (\alpha-\alpha^2)y^2}{(x^2+\alpha y^2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 1$$

Bestimmung von v für $\alpha = 1$

$$\partial_x u = \frac{x}{x^2+y^2}$$

- 1. Cauchy-Riemann-DGL:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &\stackrel{!}{=} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \\
\Rightarrow \quad v &= \int \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \stackrel{x\neq 0}{=} \frac{1}{x} \int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\, dy \\
&\stackrel{z:=\frac{y}{x}}{=} \int \frac{1}{1+z^2}\, dz = \arctan z + C = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C(x)
\end{aligned}$$

- 2. Cauchy-Riemann-DGL zur Bestimmung von $C(x)$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{-y}{x^2} + C'(x) = \frac{-y}{x^2+y^2} + C'(x) \stackrel{!}{=} -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad C'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(x) = c \in \mathbb{R}$$

Insgesamt ergibt sich

$$v(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Interaktive Aufgabe 465

a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z} \; .$$

b) Zum Entwicklungspunkt $z = -1$ gibt es zwei Laurent-Reihen. Bestimmen Sie die beiden Laurent-Reihen und ihr jeweiliges Konvergenzgebiet.

Lösung I465

a) Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = A(z+1) + Bz$$

Konvergenzmethode: Mit $z = -1$ folgt $B = -1$, $z = 0$ liefert $A = 1$

$$\Rightarrow \qquad f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$

b) nächste Singularität: $z = 0$
Konvergenzgebiete: $0 < |z+1| < 1$ bzw. $1 < |z+1| < \infty$.

<u>Gebiet 1: $0 < |z+1| < 1$:</u>

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+1)-1} = -\frac{1}{1-(z+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n$$

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} = -\frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z+1)^n$$

Gebiet 2: $1 < |z+1| < \infty$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+1)-1} = \frac{1}{z+1}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z+1}} = \frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n$$

$$\Rightarrow \qquad f(z) = -\frac{1}{z+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-2}(z+1)^n$$

Aufgabe 806

Berechnen Sie

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,, \quad a, b > 0\,,$$

mit Hilfe komplexer Integration.

Lösung A806

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}$$ hat Pole bei $z_{1,2} = \pm\, a\mathrm{i}\,,\ \ z_{3,4} = \pm\, b\mathrm{i}$

Integrationswege

$$C_1(t) = t, \quad t \in [-R, R), \qquad C_2(t) = Re^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, \pi)$$

Residuensatz

$$\int\limits_{C_1 \cup C_2} f(z)\, dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\, z_k > 0} \operatorname*{Res}_{z_k} f\,.$$

Abschätzung des komplexen Kurvenintegrals

$$\Big|\int\limits_{C_2} f(z)\, dz\Big| \le L(C_2) \cdot \max_{t \in [0,\pi)} f(Re^{\mathrm{i}t})$$

$$= \quad \pi R \max_{t \in [0,\pi)} \frac{1}{|R^2 e^{2\mathrm{i}t} + a^2||R^2 e^{2\mathrm{i}t} + b^2|} \le \frac{\pi R}{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

Somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\, z_k > 0} \operatorname*{Res}_{z_k} f$$

1. Fall: $a \neq b$

$\Rightarrow \quad z_1, \ldots, z_4$ sind einfache Polstellen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i} \left(\operatorname*{Res}_{a\mathrm{i}} f + \operatorname*{Res}_{b\mathrm{i}} f \right)$$

Residuen

$$\operatorname*{Res}_{a\mathrm{i}} f = \lim_{z \to a\mathrm{i}} (z - a\mathrm{i}) f(z) = \lim_{z \to a\mathrm{i}} \frac{1}{(z + a\mathrm{i})(z^2 + b^2)} = \frac{\mathrm{i}}{2a(a^2 - b^2)}$$

$$\operatorname*{Res}_{b\mathrm{i}} f = \frac{\mathrm{i}}{2b(b^2 - a^2)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{i}}{2(a^2 - b^2)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi(a - b)}{ab(a^2 - b^2)} = \frac{\pi}{ab(a + b)}$$

2. Fall: $a = b$

$\Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm\, a\mathrm{i}$ sind Pole 2. Ordnung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{a\mathrm{i}} f$$

Residuum

$$\operatorname*{Res}_{a\mathrm{i}} f = \lim_{z \to a\mathrm{i}} \frac{d}{dz}\left[(z - a\mathrm{i})^2 f(z)\right] = \lim_{z \to a\mathrm{i}} \frac{-2}{(z + a\mathrm{i})^3} = -\frac{2}{(2a\mathrm{i})^3} = \frac{1}{4a^3\mathrm{i}}$$

Insgesamt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{2\pi\mathrm{i}}{4a^3\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2a^3}$$