Modulprüfung Topologie

Bitte ausfüllen:

Name, Vorname	Matrikelnummer	Studiengang

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Keine
- **Beschriften** Sie bitte alle Blätter zur Abgabe mit Ihrem Namen!
- Bei den Kästchenaufgaben reicht es, das **Ergebnis** einzutragen.
- Bei Ja/Nein-Aufgaben gibt es Punkte für richtige Antworten, keine Punkte für leere Kästchen, und **negative Punkte** für falsche Antworten. Die Gesamtpunktzahl der Aufgabe kann allerdings nicht negativ werden.
- **Mobiltelefone** müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. *Metrik (ca. 4 Punkte)*

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{T}$ die von der Metrik d erzeugte Topologie auf X. Zeigen Sie, dass der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum ist.

Aufgabe 2. *Inneres, Abschluss, Rand (ca. 8 Punkte)*

(a) Geben Sie Inneres, Abschluss und Rand der Menge $([0,1] \cap \mathbb{Q})^2$ in $\mathbb{R}^2$ an.

Inneres: ☐ Abschluss: ☐ Rand: ☐

(b) Man finde zwei verschiedene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}$ mit leerem Rand.

(c) Man beweise, dass für alle anderen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}$ der Rand nicht leer ist.

(d) Man zeige, dass es in $\mathbb{Q}$ überabzählbar viele Teilmengen mit leerem Rand gibt.

Aufgabe 3. *Kompaktheit (ca. 5 Punkte)*

Gelten die folgenden Aussagen für alle topologischen Räume?	**wahr**	**falsch**
(a) Wenn es eine endliche Überdeckung eines Raumes X mit offenen Mengen $O_1, \dots, O_k$ gibt, dann ist X kompakt.	☐	☐
(b) Ist ein Raum X kompakt, dann auch jeder Teilraum $A \subset X$.	☐	☐
(c) Ist ein Raum X kompakt, dann auch jeder Quotient $X \twoheadrightarrow Y$.	☐	☐
(d) Sind zwei Räume X und Y kompakt, dann auch ihr Produkt $X \times Y$.	☐	☐
(e) Sind zwei Räume X und Y kompakt, dann auch ihre Summe $X \sqcup Y$.	☐	☐

Zur Klarstellung / Vereinfachung: Kompaktheit setzt die Hausdorff–Eigenschaft nicht voraus.

Aufgabe 4. *Homöomorphismen (ca. 9 Punkte)*

Stellen Sie fest, ob die folgenden Räume X_i und Y_i homöomorph sind oder nicht. Geben Sie einen Homöomorphismus (ohne Nachweis) zwischen den Räumen X_i und Y_i an oder nennen Sie eine topologische Eigenschaft (ohne Nachweis), in der sich die beiden unterscheiden. (Soweit nichts anderes angegeben ist, tragen die Räume die Teilraumtopologie des $\mathbb{R}^n$.)

(a) $X_1 = [-1, 1]$ und $Y_1 = [0, 1]$

(b) $X_2 = \,]-1, 1[$ und $Y_2 = \mathbb{R}$

(c) $X_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1 \}$ und $Y_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \}$

(d) $X_4 = \mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$ und $Y_4 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit Quotiententopologie

(e) $X_5 = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ und $Y_5 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_{>0}$

(f) $X_6 = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ und $Y_6 = \mathbb{R}^2$

Aufgabe 5. *Homotopie (ca. 4 Punkte)*

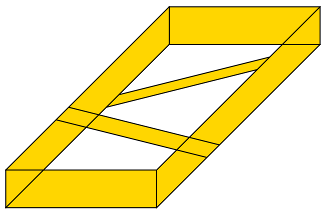
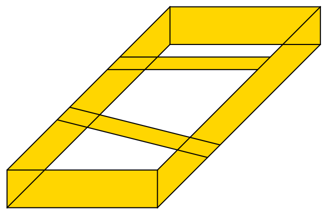
Sei X ein topologischer Raum und $Y = X \times [0,1]$ das Produkt mit dem Einheitsintervall. Zeigen Sie, dass X und Y homotopie-äquivalent sind. (Sie brauchen hierzu stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ sowie Homotopien $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$.)

Aufgabe 6. *Euklidische Räume (ca. 5 Punkte)*

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?	**wahr**	**falsch**
(a) Die Räume $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ sind homöomorph.	☐	☐
(b) Die Räume $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ sind homotopie-äquivalent.	☐	☐
(c) Der Raum $\mathbb{R}^4$ ist homöomorph zu einer abgeschlossenen Menge im $\mathbb{R}^5$.	☐	☐
(d) Der Raum $\mathbb{R}^4$ ist homöomorph zu einer offenen Menge im $\mathbb{R}^5$.	☐	☐
(e) Die Räume $\mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R}_{\ge 0}$ und $\mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R}$ sind homöomorph.	☐	☐

Aufgabe 7. *Flächen (ca. 9 Punkte)*

Wir betrachten die folgenden Flächen mit Rand:

$A =$  $B =$ 

Bestimmen Sie die Anzahl der Randkomponenten, die Euler–Charakteristik sowie die Orientierbarkeit (jeweils ohne Begründung). Sind die beiden Flächen homöomorph?

Aufgabe 8. *Fundamentalgruppe (ca. 5 Punkte)*

Sei X ein topologischer Raum, $A, B \subset X$ zwei Teilräume und $x \in A \cap B$ ein gemeinsamer Punkt. Sind die folgenden Aussagen immer wahr oder manchmal falsch?

	wahr	**falsch**
(a) Die Fundamentalgruppe $\pi_1(A,x)$ ist eine Untergruppe von $\pi_1(X,x)$.	☐	☐
(b) Sind A und B wegzusammenhängend, dann auch $A \cup B$.	☐	☐
(c) Sind A und B einfach zusammenhängend, dann auch $A \cup B$.	☐	☐
(d) Es gibt eine wegzusammenhängende Überlagerung $Y \to X$ mit 2 Blättern.	☐	☐
(e) Es gibt eine unzusammenhängende Überlagerung $Y \to X$ mit 2 Blättern.	☐	☐
