# Fingerübungen zur Wiederholung

*In Ihren Grundvorlesungen haben Sie bereits einige algebraische Techniken erlernt. Die folgenden Fragen sollten Ihnen daher mühelos und zügig von der Hand gehen. Meistens reicht scharfes Nachdenken, manchmal lohnt auch geschicktes Rechnen. Wenn Sie eine Aufgabe mit Hilfe einer geeigneten Technik lösen, lohnt es sich zur Wiederholung, diese Technik explizit zu formulieren. Fragen über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ klingen mehr nach Analysis als nach Algebra; ich halte sie hier jedoch für Allgemeinbildung zum Aufbau des Zahlensystems.*

## 1. Ein paar Rechnungen mit natürlichen Zahlen

**1.1.** (a) Man beweise die geschlossene Formel für $\sum_{k=0}^{n} k$ als Funktion von $n \in \mathbb{N}$.
(b) Man finde eine geschlossene Formel für $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{\ell}$ als Funktion von $n, \ell \in \mathbb{N}$.

**1.2.** Die letzte Ziffer der Zahl 5432 in Dezimalschreibweise ist 2.
Was ist die letzte Ziffer der Potenz $5432^{2345}$ in Dezimalschreibweise?

**1.3.** Man übersetze folgende formale Aussage in die Umgangssprache:

$$\forall n, a, b \in \mathbb{N} \colon \left(n^2 + n + 41 = ab \implies (a = 1 \vee b = 1)\right).$$

Wenn die Aussage wahr ist, so gebe man einen Beweis (möglichst einfach).
Andernfalls gebe man ein Gegenbeispiel (möglichst minimal).

Zur Information: Die kleinsten Primzahlen lauten 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999, … (wie immer ohne Gewähr).

## 2. Ein paar Rechnungen mit komplexen Zahlen

**2.1.** (a) Welche Beziehung besteht zwischen $\exp(x+y)$ und $\exp(x)$ und $\exp(y)$?
(b) Man drücke $\exp(ix)$ und $\exp(-ix)$ aus mittels $\cos(x)$ und $\sin(x)$.
(c) Man drücke $\cos(x)$ und $\sin(x)$ aus mittels $\exp(ix)$ und $\exp(-ix)$.
(d) Man drücke $\cos(2x)$ und $\sin(2x)$ aus mittels $\cos(x)$ und $\sin(x)$.
(e) Man drücke $\cos(3x)$ und $\sin(3x)$ aus mittels $\cos(x)$ und $\sin(x)$.

**2.2.** (a) Zu $z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ finde man $z^6$ in algebraischer Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
(b) Zu diesem $z$ berechne man $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5$ in algebraischer Form.
(c) Für $2^{-n} \sum_{k=0}^{n} i^k 3^{k/2} \binom{n}{k}$ finde man eine geschlossene Formel (ohne Summe).
(d) Für $n = 101$ bestimme man den Wert der vorhergehenden Summe.

**2.3.** (a) Welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ erfüllen $z^2 = -2i$?
(b) Welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ erfüllen $z^2 - 2iz + 2i - 1 = 0$?
(c) Wie viele reelle bzw. komplexe Wurzeln hat die Gleichung $x^{257} = 1$?
(d) Wie viele reelle Nullstellen hat ein Polynom $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ mindestens? höchstens? und komplexe Nullstellen?

## 3. Mengen und Abbildungen

**3.1.** (Nach Lewis Carroll) Von 100 Kriegsveteranen verloren mindestens 70 ein Auge, mindestens 75 ein Ohr, mindestens 80 einen Arm, und mindestens 85 ein Bein. Mindestens wie viele verloren sowohl Auge, Ohr, Arm als auch Bein?

**3.2.** Wann heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ *injektiv* / *surjektiv* / *bijektiv*?

**3.3.** (a) Ist $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(x) = x^3$ injektiv? surjektiv? bijektiv?
(b) Ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3$ injektiv? surjektiv? bijektiv?
(c) Ist $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $h(x) = x^3$ injektiv? surjektiv? bijektiv?

**3.4.** (a) Ist $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv? surjektiv? Welche Elemente liegen im Bild?
(b) Ist $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv? injektiv? Was sind die Urbilder von 1?
(c) Warum fehlt das analoge Beispiel "$\exp\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$" in dieser Liste?

**3.5.** Seien $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subset X$ sowie $U, V \subset Y$ Teilmengen.
(a) Welche Beziehung gilt zwischen $f(A \cup B)$ und $f(A) \cup f(B)$?
(b) Welche Beziehung gilt zwischen $f(A \cap B)$ und $f(A) \cap f(B)$?
(c) Welche Beziehung gilt zwischen $f^{-1}(U \cup V)$ und $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$?
(d) Welche Beziehung gilt zwischen $f^{-1}(U \cap V)$ und $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$?

## 4. Körper und Vektorräume

**4.1.** Die Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ haben unendlich viele Elemente.
Gibt es auch endliche Körper? Wenn ja, so nenne man den kleinsten.

**4.2.** (a) Ist $\mathbb{C}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$? Können Sie hierzu eine Basis angeben?
(b) Ist $\mathbb{C}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$? Können Sie hierzu eine Basis angeben?
(c) Kann umgekehrt auch $\mathbb{Q}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ sein? oder über $\mathbb{R}$?

**4.3.** Wir versehen die zwei-elementige Menge $E = \{0, 1\}$ mit
- der Addition $+\colon E \times E \to E$ wobei $0+0 = 1+1 = 0$ und $0+1 = 1+0 = 1$,
- der Multiplikation $\cdot\colon \mathbb{R} \times E \to E$ wobei $\lambda \cdot v = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in E$.

Ist $(E, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum? Welche Axiome gelten, welche nicht?

**4.4.** Sind $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ und $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$ Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$? Wie steht es mit Durchschnitt $S \cap T$ und Vereinigung $S \cup T$?

**4.5.** Man nenne eine Basis des Untervektorraums $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

## 5. Lineare Abbildungen und Matrizen

**5.1.** Wann heißt eine Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen Vektorräumen über $K$ *linear*?
(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0,0) = 0$ und sonst $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.
Ist $f$ linear? Wie steht's mit $g(0,0) = 0$ und sonst $g(x,y) = \frac{x^2y+y^3}{x^2+y^2}$?
(b) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{Bmatrix} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{Bmatrix}$ linear über $\mathbb{R}$? über $\mathbb{Q}$?

**5.2.** Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(x,y,z) = (x - 3y + z, 2x - 6y + 2z, 4x - 8y + 2z)$.
Man schreibe die Matrix von $f$ bezüglich folgender Basen von $\mathbb{R}^3$:
(a) der kanonischen Basis $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$,
(b) der besonderen Basis $b_1 = (1,1,2)$, $b_2 = (1,2,4)$, $b_3 = (1,2,3)$.
Man bestimme eine Basis des Kerns und des Bildes von $f$.

**5.3.** Gibt es eine Matrix $A$ sodass $A^2 \neq 0$ aber $A^3 = 0$ gilt? Und zudem $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$?

## 6. Determinanten und Eigenvektoren

**6.1.** (a) Wann heißt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ über $\mathbb{R}$ *invertierbar*?
(b) Was lässt sich über die Spaltenvektoren einer invertierbaren Matrix sagen?
(c) Ist die allseits beliebte Telefonmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ invertierbar?

**6.2.** Es sei $A = (a_{ij})$ eine $(n \times n)$-Matrix mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
(a) Welche Beziehung besteht zwischen der Determinante $\det(A)$ und dem Volumen des von den Spaltenvektoren von $A$ aufgespannten Parallelepipeds?
(b) Wie lautet die Formel für $\det(A)$ als Funktion der Koeffizienten $a_{ij}$?
(c) Welche Beziehung gilt zwischen $\det(AB)$ und $\det(A)$ und $\det(B)$?
(d) Was sagt $\det(A)$ über die Invertierbarkeit von $A$ aus?

**6.3.** Welche der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

## 7. Von Bällen und Körpern

Wir versuchen eine Vorhersage zum Endspiel der Fußball-Weltmeisterschaft mit Hilfe der linearen Algebra. Zur Erinnerung: Bei regelrechter Ausführung wird zum Anstoß der ersten Halbzeit ($t = 0$) der Fußball genau auf dem Mittelpunkt des Spielfelds platziert. Nach gespielter erster Halbzeit, kurzer Pause und Seitenwechsel wird er zu Beginn der zweiten Halbzeit ($t = 45$) erneut auf den Mittelpunkt des Spielfelds gelegt.

**7.1.** Muss es Punkte auf der Balloberfläche geben, die zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 45$ an derselben Position liegen? In Dimension 2 gilt dies jedenfalls nicht!

*Diskussion:* Inwiefern hängt die Antwort von der Einhaltung der Spielregeln ab? Von der Beschaffenheit des Balls? Vom Spielverlauf? (Und wie alt ist der Kapitän?)

(a) Das Runde und das Eckige


(b) Sir William Hamilton

Zu guter Letzt noch eine schöne mathematische Anwendung der vorhergehenden Techniken. Wir erinnern daran, dass der Körper $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ von Dimension 2 über $\mathbb{R}$ ist.

**7.2.** Gibt es einen Körper $K \supset \mathbb{R}$ der Dimension 3 über $\mathbb{R}$?

*Hinweis:* Man kann jedes Körperelement $a \in K$ als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A\colon K \to K$ auffassen vermöge $A\colon x \mapsto ax$. Unter welcher Bedingung an $a$ ist $A$ invertierbar? Hat $A$ reelle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$? Wenn $A - \lambda\,\mathrm{I}$ nicht invertierbar ist, was folgt dann für $a$?

*Historische Anmerkung.* Der irische Mathematiker und Physiker William Rowan Hamilton (1805–1865) deutete 1833 die komplexen Zahlen als geordnete Paare reeller Zahlen. Damit war er der Erste, der den Körper $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ begriff (auch wenn die abstrakten Begriffe damals noch nicht bekannt waren). Er verbrachte daraufhin zehn Jahre mit der verzweifelten Suche nach einem Körper der Dimension 3. Er fand 1843 schließlich die Hamiltonschen Quaternionen und ewigen Ruhm in Dimension 4.

*Historisch-didaktische Anmerkung.* Warum war das obige Problem für Hamilton unüberwindbar und ist heute eine einfache Übungsaufgabe? Wir Heutigen empfangen die gesammelte Weisheit mehrerer Jahrhunderte wissenschaftlichen Wirkens unserer Vorgänger… Seien wir uns der heroischen Leistungen bewusst! Mögen wir uns dieses wertvollen Erbes würdig erweisen und den Ruhm unserer Wissenschaft wahren und mehren!