Übungsblatt 9: Sylowsatz und semidirekte Produkte

Die folgenden Lemmata könnten Ihnen bei einigen Aufgaben auf dem Blatt hilfreich sein. Sei im Folgenden G stets eine endliche Gruppe und p eine Primzahl.

Lemma 1. Sind $K, H < G$ Untergruppen mit $\mathrm{ggT}(|K|, |H|) = 1$. Dann ist $K \cap H = \{1\}$. Gilt andererseits $|K| = |H| = p$, so ist entweder $K \cap H = \{1\}$ oder $K = H$.

Lemma 2. Sind $K, H \lhd G$ Normalteiler mit $K \cap H = \{1\}$, dann ist $KH \cong K \times H$.

1. Einfache Gruppen der Ordnung 60

1.1. Wenn $K < S_n$ eine Untergruppe vom Index 2 ist, dann gilt $K = A_n$.

1.2. Wenn es nur eine p-Sylowgruppe P in einer Gruppe G gibt, dann ist $P \lhd G$.

1.3. (a) Sei G eine endliche Gruppe und r die Anzahl der p-Sylowgruppen. Dann gibt es einen Homomorphismus $\varphi : G \to S_r$.
(b) Ist G einfach und φ nicht trivial, so ist φ sogar injektiv, also ist $|G|$ ein Teiler von $r! = |S_r|$.

Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung $|G| = 60$. Wir wollen zeigen, dass $G \cong A_5$.

S 1.4. (5 Punkte)
(a) Zeigen Sie, dass es in G genau zehn 3-Sylowgruppen gibt.
Hinweis: Sylowsatz und Aufgaben 1.2 und 1.3.
(b) Zeigen Sie, dass es in G genau sechs 5-Sylowgruppen gibt.
(c) Zeigen Sie, dass es in G fünf 2-Sylowgruppen gibt. *Hinweis:* Wieviele Elemente von G hätten wir schon gefunden, wenn es 15 2-Sylowgruppen gäbe?
(d) G operiert auf der Menge der 2-Sylowgruppen und damit gibt es einen Homomorphismus $G \to S_5$. Folgern Sie aus 1.1, dass $G \cong A_5$.

2. Gruppen der Ordnung 8

Für jede endliche Gruppe G existiert ein injektiver Gruppenhomomorphismus $G \hookrightarrow S_n$ für gewisse n. Man kann sich fragen, welches für G das kleinste n ist. Sicherlich ist $n = |G|$ immer möglich, aber meist zu groß:

V 2.1. Betrachten wir die Diedergruppe D_4 der Ordnung 8.
(a) Man zeige $D_4 \hookrightarrow S_4$ indem man eine zu D_4 isomorphe Untergruppe $H < S_4$ angibt. Gibt es solche Gruppen auch in S_n mit $n < 4$?

Betrachten wir nun die Quaternionengruppe Q, ebenfalls der Ordnung 8.

(b) Man erläutere zunächst $Q \ncong D_4$.
(c) Ist H eine 2-Sylowgruppe in S_4? in S_5?
Gibt es eine Untergruppe in S_5 isomorph zu Q?
(d) Man finde $K < S_6$ isomorph zu $D_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ist K eine 2-Sylowgruppe in S_6? in S_7? Gibt es eine Untergruppe in S_7 isomorph zu Q?

Welches ist demnach der minimale Grad n für eine Einbettung $Q \hookrightarrow S_n$?

2.2. Zeigen Sie, dass alle Untergruppen von Q normal sind.

2.3. Lässt sich Q in nichttrivialer Weise als semidirektes Produkt schreiben?

Bemerkung: Es gibt bis auf Isomorphie genau fünf Gruppen der Ordnung acht: $\mathbb{Z}/_8, \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_4, (\mathbb{Z}/_2)^3, D_4 = \mathbb{Z}/_4 \rtimes \mathbb{Z}/_2$ und Q.

3. Matrixgruppen über endlichen Körpern

3.1. Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/_p)^n, +)$ isomorph zu $GL_n(\mathbb{Z}/_p)$ ist.

Sei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen (z.B. $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/_p$ für eine Primzahl p).

V 3.2. (a) Bestimmen Sie die Ordnung der Gruppe $GL_n(\mathbb{F}_q)$. *Hinweis:* Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Spalten eine Basis von $\mathbb{F}_q^n$ bilden.
(b) Was ist dann die Ordnung von $SL_n(\mathbb{F}_q)$?

S 3.3. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$. Lassen Sie hierzu $GL_2(\mathbb{F}_2)$ auf den drei Geraden des $\mathbb{F}_2$-Vektorraums $\mathbb{F}_2^2$ operieren.

4. Gruppen der Ordnung 12

S 4.1. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es in einer Gruppe der Ordnung 12 stets einen nichttrivialen Normalteiler der Ordnung drei oder vier gibt. Damit ist jede Gruppe der Ordnung 12 ein semidirektes Produkt ihrer Sylowgruppen.
Hinweis: Sylowsatz und Abzählen der Elemente.

Nun wollen wir alle möglichen semidirekten Produkte untersuchen, die man aus Gruppen der Ordnungen drei und vier erzeugen kann.

V 4.2. (a) Zeigen Sie, dass es jeweils genau ein nichttriviales semidirektes Produkt der Form $\mathbb{Z}/_3 \rtimes \mathbb{Z}/_4$ und $(\mathbb{Z}/_2)^2 \rtimes \mathbb{Z}/_3$ gibt.
(b) Warum sind alle nichttrivialen semidirekten Produkte der Form $\mathbb{Z}/_3 \rtimes (\mathbb{Z}/_2)^2$ untereinander isomorph?
(c) Gibt es ein nichtriviales semidirektes Produkt der Form $\mathbb{Z}/_4 \rtimes \mathbb{Z}/_3$?
(d) Zeigen Sie, dass die Gruppen aus (a) und (b) untereinander nicht isomorph sind. Wieviele Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung 12 gibt es also?

4.3. Die Gruppen A_4 und $D_6 \cong \mathbb{Z}/_6 \rtimes \mathbb{Z}/_2$ haben Ordnung 12. Zu welchen der obigen Gruppen sind diese isomorph?

5. Auflösbarkeit

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass alle Gruppen der Ordnung < 60 auflösbar sind. Wir wissen schon aus der Vorlesung, dass Gruppen der Ordnung p^n und pq für Primzahlen p, q auflösbar sind.

5.1. Zeigen Sie, dass Gruppen der Ordnung pqr ($p < q < r$ Primzahlen) auflösbar sind, indem Sie zeigen, dass es entweder einen nichttrivialen Normalteiler geben muss (was folgt dann daraus?) oder die Anzahl der p-Sylowgruppen mindestens q, die Anzahl der q-Sylowgruppen mindestens r und die Anzahl der r-Sylowgruppen mindestens pq sein müsste. Damit ergeben sich dann zu viele Gruppenelemente.

5.2. Zeigen Sie, dass Gruppen der Ordnung p^2q auflösbar sind. *Hinweis:* Im Fall $p < q$ beachte man, dass aus $p^2 \equiv 1 \mod q$ folgt, dass $q \mid p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$.

5.3. Man zeige, dass Gruppen der Ordnung $24, 36, 40, 48, 54$ und 56 auflösbar sind.
Hinweis: Aufgabe 1.3 (und alle bisherigen Methoden)

Bemerkung: Burnside bewies 1904, dass alle Gruppen der Ordnung $p^n q^m$ auflösbar sind. Er vermutete zudem, dass alle Gruppen ungerader Ordnung auflösbar sind. Dieser Satz wurde schließlich 1962 von Feit und Thompson bewiesen und öffnete den Weg zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen in den darauffolgenden Jahrzehnten.