Übungsblatt 8: Gruppen und Symmetrien

1. Symmetrische und alternierende Gruppen

1.1. Es gilt $S_n = \langle (1,2),(2,3),\dots,(n-1,n)\rangle$. Ebenso gilt $S_n = \langle (1,2),(1,3),\dots,(1,n)\rangle$.

Lösungshinweise: — *Der erste Teil steht im Skript. Der zweite Teil folgt aus* $(1,j)(1,i)(1,j) = (i,j)$. —

S 1.2. (3 Punkte) Finden Sie einen 2-Zykel $\tau \in S_n$ und einen n-Zykel $\sigma \in S_n$, die zusammen die symmetrische Gruppe $S_n = \langle \tau, \sigma\rangle$ erzeugen und weisen Sie dies nach. Erzeugen $\tau = (1,3)$ und $\sigma = (1,2,3,4)$ die Gruppe S_4?

Lösungshinweise: — *Die Wahl* $\sigma = (1,2,\dots,n)$ *und* $\tau = (1,2)$ *funktioniert. Denn nach Lemma 10B11 ist* $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(1),\sigma(2)) = (2,3)$ *und induktiv* $\sigma^k\tau\sigma^{-k} = (k+1,k+2)$ *für* $k \le n-2$. *Aus der Aufgabe 1.1 folgt dann das Gewünschte.*
Für den zweiten Teil kann man alle möglichen Produkte ausrechnen und sehen, dass sich nur 8 *verschiedene Elemente ergeben oder man sieht, dass die beiden Elemente in der Symmetriegruppe eines Quadrats mit Ecken* 1,2,3 *und* 4 *liegen. Diese* (D_4) *hat aber nur* 8 *Elemente, kann also nicht die* S_4 *sein.* —

S 1.3. (2 Punkte) Sei n eine Primzahl. Man zeige, dass jede Transposition $\tau \in S_n$ und jeder n-Zykel $\sigma \in S_n$ die symmetrische Gruppe $S_n = \langle \tau, \sigma\rangle$ erzeugen.

Lösungshinweise: — *Durch Umbenennung der Elemente, auf denen* S_n *operiert, können wir o.B.d.A. annehmen, dass* $\sigma = (1,2,\dots,n)$ *gilt. Dann ist* $\tau = (i,j)$ *mit* $i < j$.
Durch Konjugation von τ *mit* σ *kann man wie in der Aufgabe 1.2 erreichen, dass man an der ersten Stelle eine* 1 *erhält und an der zweiten Stelle* $1+j-i$. *Genauer:* $\sigma^{1-i}(i,j)\sigma^{i-1} = (1,1+j-i)$.
Wegen der Primalität von n *sind alle Potenzen* σ^k *für* $1 \le k < n$ *wieder* n*-Zykel, denn die auftretenden Zykellängen in* σ^k *müssen nach Lagrange die Ordnung* $\operatorname{ord}(\sigma) = n$ *teilen. Insbesondere ist* $\sigma^{j-i} = (1,1+j-i,*,\dots,*)$. *Nun benennen wir die Elemente so um, dass* σ^{j-i} *die Form* $(1,2,\dots,n)$ *und* $(1,j-i+1)$ *die Form* $(1,2)$ *bekommt. Dann folgt die Aussage aus Aufgabe 1.2.* —

1.4. Es gilt $A_n = \langle (1,2,3),(2,3,4),\dots,(n-2,n-1,n)\rangle$.

Lösungshinweise: — *Für* A_1, A_2 *und* A_3 *ist die Aussage klar. Sei nun* $\sigma \in A_n$. *Falls* $\sigma(n) = n$ *gilt, so ist* $\sigma \in A_{n-1}$ *und wir können Induktion anwenden. Wenn dagegen* $\sigma(n) = m \ne n$, *dann betrachte* $\omega_{n-1}\cdots\omega_m\sigma$ *mit* $\omega_i = (i-1,i,i+1)$. *Diese Permutation bildet* n *auf* n *ab, hat Signum* 1 *und ist damit in* A_{n-1}. *Induktion erledigt dann den Rest.* —

1.5. In A_3 und A_4 sind nicht alle 3-Zykel zueinander konjugiert.

Lösungshinweise: — A_3 *wird von* $(1,2,3)$ *erzeugt und damit abelsch. Also ist die Konjugation auf* A_3 *stets trivial. Insbesondere sind* $(1,2,3)$ *und* $(1,3,2)$ *nicht zueinander konjugiert.*
Falls $\tau(1,2,3)\tau^{-1} = (1,3,2)$ *für ein* $\tau \in A_4$ *gelten würde, so müsste* τ *einerseits die Zahl* 4 *bewegen, denn sonst wären wir wieder in* A_3, *andererseits erhält man bei Konjugation mit* τ *das Zykel* $(\tau(1),\tau(2),\tau(3))$ *und eine dieser Zahlen ist dann die* 4, *im Widerspruch zur Annahme.* —

1.6. Man bestimme die möglichen Ordnungen von $\sigma \in S_n$ für $n = 2,\dots,10$.

Lösungshinweise: — *Man muss sich dazu alle möglichen Zykelstrukturen ansehen und die kgV der Zykellängen bilden. Also z.B.* $n = 7 : 1,2,3,4,5,6,7,10,12$, $n = 8 : 1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,15$. *Für* $n = 9$ *kommen noch die Ordnungen* 9,14 *und* 20 *hinzu. Für* $n = 10$ *noch* 21 *und* 30. —

V 1.7. Zu $\sigma = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 & 10 & 9 & 12 & 11 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{smallmatrix}\right]$ bestimme man die Ordnung des Zentralisators $Z_{S_{16}}(\sigma)$ und der Konjugationsklasse $\sigma^{S_{16}}$. Zusatz: Können Sie Elemente angeben, die den Zentralisator erzeugen?

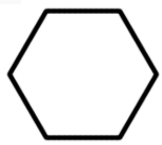
Lösungshinweise: — *Man schreibt* $\sigma = (1,2,3)(4,5,6)(7,8)(9,10)(11,12)$ *in Zykelschreibweise. Die Ordnung des Zentralisators ergibt sich zu* $4! \cdot 3! \cdot 2^3 \cdot 2! \cdot 3^2 = 20736$. *(= Anzahl der Möglichkeiten die Zykel gleicher Länge untereinander zu vertauschen multipliziert mit den Möglichkeiten die Zykel in sich selbst zu permutieren. Siehe auch Formel in Satz 10B12 der Vorlesung.) Die Erzeuger sind also z.B.* $(1,2,3),(4,5,6),(7,8),(9,10),(11,12),(1,4)(2,5)(3,6),(7,9)(8,10),(7,11)(8,12),(13,14),(14,15),(15,16)$.
Die Anzahl der Elemente in der Konjugationsklasse ergibt sich damit nach Bahnenlemma zu $|S_{16}|/|Z_{S_{16}}(\sigma)| = 1009008000$. —

2. Symmetriegruppen

Sei X eine Menge, auf der die Gruppe G operiert und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann nennen wir $\operatorname{stab}(M) := \{g \in G : gM = M\}$ die Symmetriegruppe von M.

2.1. Zeigen Sie, dass $\operatorname{stab}(M)$ wirklich eine Gruppe ist.

Lösungshinweise: — *Falls* $gm = m$ *und* $hm = m$, *so folgt* $(gh)m = g(hm) = gm = m$ *und* $g^{-1}m = g^{-1}(gm) = (g^{-1}g)m = em = m$. *Es gilt auch* $em = m$ *(nach Definition), also ist* $\operatorname{stab}(M)$ *eine Untergruppe von G.*



2.2. Sei $G = O_2(\mathbb{R})$ und P_n das regelmäßige n-Eck ($n \geq 3$) im $\mathbb{R}^2$, d.h. die Menge der Punkte $(\cos(\frac{2\pi k}{n}), \sin(\frac{2\pi k}{n})), 1 \leq k \leq n$. Dann definieren wir die *Diedergruppe* als $D_n := \operatorname{stab}(P_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass D_n genau $2n$ Elemente besitzt.

(b) Stellen Sie D_4 als Untergruppe von S_4 dar.

(c) Zeigen Sie, dass die Gruppe D_n einen Normalteiler der Ordnung n enthält.

Lösungshinweise: —

(a) *Sei* $g \in D_n$ *gegeben, dann muss g den Punkt* $p_n = (1,0) \in P_n$ *auf einen beliebigen anderen Punkt* $p_k := (\cos(\frac{2\pi k}{n}), \sin(\frac{2\pi k}{n}))$ *abbilden. Der benachbarte Punkt* p_1 *kann wegen* $g \in O_2(\mathbb{R})$ *(Längen bleiben erhalten) nur auf* p_{k+1} *oder* p_{k-1} *abgebildet werden (dabei soll* $p_0 := p_n$ *sein).*
Die Abbildung g ist linear und damit durch die Angabe von zwei Bildern festgelegt. Im ersten Fall haben wir es also mit einer orientierungserhaltenden Abbildung und im zweiten Fall mit einer orientierungsumkehrenden zu tun. Die Klassifikation aller orthogonalen Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ *aus der linearen Algebra liefert uns, dass im ersten Fall eine Drehung um* $\frac{2\pi k}{n}$ *vorliegt. Im zweiten Fall ist es eine Spiegelung. Die Achse muss die Winkelhalbierende des Winkels* $p_0, (0,0), p_k$ *sein. Zählen wir alle so entstehenden Elemente zusammen, so ergeben sich 2n Möglichkeiten. All diese sind voneinander verschieden, da sie die Punkte* p_0 *und* p_1 *jeweils unterschiedlich abbilden. Damit ist* $|D_n| = 2n$

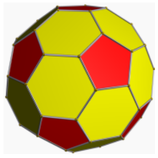
(b) *Im Fall* D_4 *batrachten wir die Symmetriegruppe des Quadrats. Wir nummerieren die Ecken wie vorher gegen den Uhrzeigersinn mit* $1,2,3,4$ *durch. Es ergibt sich*
$\{\mathrm{id}, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2), (1,3), (2,4), (1,2)(3,4).(1,4)(2,3)\}$.

(c) *Alle Drehungen bilden eine Untergruppe der Ordnung n. Diese bilden auch einen Normalteiler, da die Konjugation mit einer Matrix aus* $O_2(\mathbb{R})$ *die Determinante nicht ändert und somit Drehungen wieder in Drehungen übergehen.*

—

2.3. Überlegen Sie sich, dass die Symmetriegruppe des regelmäßigen Tetraeders gerade S_4 ist. Welche Untergruppe ergibt sich, wenn man sich auf die orientierungserhaltenden Abbildungen (Drehungen) einschränkt?

Lösungshinweise: — *Wir betrachten die Spiegelung an einer Ebene, die durch zwei Ecken und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite geht. Diese vertauscht nur zwei der vier Ecken des Teatraeders, entspricht also einer Transposition. Damit ist die Gruppe also isomorph zu* S_4. *Wenn man nur Drehungen betrachtet, so erhalten wir gerade alle 3-Zykel (Drehung um die Ache durch eine Ecke und die Mitte der gegenüberliegenden Fläche) und somit die* A_4. —

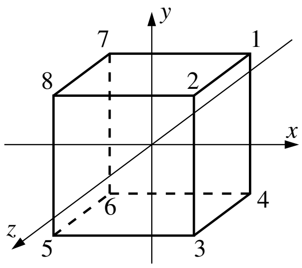


V 2.4. Bestimmen Sie mit Hilfe der Bahnengleichung die Ordnung der Symmetriegruppe des Fussballs (in $SO_3(\mathbb{R})$).

Lösungshinweise: — *Der Fussball hat* 12 *Fünfecke, die alle durch Drehungen ineinander überführt werden können. Jedes solche Fünfeck hat aber noch eine 5-zählige Symmetrie. Die Stabilisatorgruppe der Operation der Symmetriegruppe auf den Fünfecken hat also* 5 *Elemente und die Bahn* 12. *Damit ergibt sich mit Bahnenlemma dass die Gruppe* 60 *Elemente enthält.* —

3. Symmetriegruppe des Würfels

Sei H die Isometriegruppe des Würfels (Drehungen und Spiegelungen) und sei H^+ die Untergruppe der orientierungstreuen Isometrien (Drehungen). Seien α, β, γ die Drehungen um den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ um die Achsen x, y, z, und sei σ die Punktspiegelung am Ursprung. (Ist dies eine Drehung oder eine Spiegelung?)



V 3.1. Wir betrachten die Operation von H^+ auf den 8 Ecken. Was ist für eine gegebene Ecke die Bahn und was die Standgruppe? Man bestimme hieraus die Ordnungen der Gruppen H^+ und H. Die Operation induziert einen Gruppenhomomorphismus $H \to S_8$. Ist dieser injektiv? surjektiv? Man zerlege die Aktion von $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ in disjunkte Zykel.

Lösungshinweise: — *Es gibt* 8 *Ecken und in der Gruppe* H^+ *gibt es für eine Ecke genau drei Drehungen, die die Ecke fest lassen. Also ist* $|H^+| = 24$. *In* H *operiert die Stabilisatorgruppe einer Ecke auf den von der Ecke ausgehenden Kanten wie die* S_3, *also ist* $|H| = 48$.
Der Gruppenhomomorphismus $H \to S_8$ *ist injektiv, weil keine Symmetrie (*$\neq$ *Identität) des Würfels alle Ecken gleichzeitig festhält. Sie ist offenbar nicht surjektiv, weil* S_8 *weit mehr als* 48 *Elemente hat.*
Es ist in Zykelschreibweise $\alpha = (1234)(5678)$, $\beta = (1782)(3465)$, $\gamma = (1764)(2853)$ *und* $\sigma = (15)(26)(37)(48)$.
—

S 3.2. (4 Punkte) Man untersuche ebenso die Operation von H^+ bzw. H auf den 4 Diagonalen $D_1 = \{1,5\}$, $D_2 = \{2,6\}$, $D_3 = \{3,7\}$, $D_4 = \{4,8\}$. Was sind Bild und Kern von $H^+ \to S_4$ und $H \to S_4$? Ist die Untergruppe $\langle\sigma\rangle$ normal in H? Ist sie zentral?

Lösungshinweise: — *Wenn H^+ bzw. H auf den 4 Diagonalen operieren, ergeben sich damit Homomorphismen $H^+ \to S_4$ und $H \to S_4$. Wir wollen zeigen, dass diese surjektiv sind.*
Dazu betrachten wir zuerst eine Drehung um die Achse, die durch die Mittelpunkte der Seiten $\{2,3\}$ und $\{6,7\}$ verläuft. Sie führt die Diagonalen D_1 und D_4 in sich über, vertauscht aber D_2 und D_3. Damit entspricht diese der Trasposition $(2,3)$ in S_4. Drehungen um entsprechende andere Geraden ergeben, dass alle Transpositionen im Bild von H^+ liegen, also ist die obige Abbildung surjektiv. Nun hat H^+ nach Aufgabe 3.1. die gleiche Ordnung wie S_4, nämlich 24. Damit ist die Abbildung also auch injektiv und damit ein Isomorphismus. Im Fall von H ergibt sich damit automatisch die Surjektivität und der Kern muss aus Kardinalitätsgründen ($|H| = 48$) 2 Elemente enthalten. Die Spiegelung, die alle Diagonalen festhält, ist die in der Aufgabe angegebene Punktspielgelung am Ursprung.
Es folgt, dass $\langle\sigma\rangle$ als Kern eines Homomorphismus normal in H ist. Da die Ordnung 2 ist, folgt aus Aufgabe 2.2 vom Blatt 7, dass sie sogar zentral ist. —

3.3. Man berechne $\alpha\beta\alpha^{-1}$ und $\alpha^{-1}\beta\alpha$ in einer der vorhergehenden Darstellungen. Gilt $H^+ = \langle\alpha,\beta\rangle$? Gilt $H = \langle\alpha,\beta,\sigma\rangle$? Gilt gar $H = \langle\alpha,\beta\sigma\rangle$?

Lösungshinweise: — *Es ist $\alpha\beta\alpha^{-1} = \gamma$ und $\alpha^{-1}\beta\alpha = \gamma^{-1}$. Weiter ist z.B. $\alpha^2\beta$ die Drehung aus Aufgabe 3.2, die die Diagonalen D_2 und D_3 vertauscht. Also erzeugen α und β alle "Transpositionen" auf den Diagonalen und damit $H^+ = \langle\alpha,\beta\rangle$.*
Da H doppelt so viele Elemente wie H^+ besitzt und σ nicht in H^+ enthalten ist (Spiegelung!), muss die Untergruppe $\langle\alpha,\beta,\sigma\rangle$ nach Lagrange schon ganz H sein.
Da σ nach Aufgabe 3.2 zentral ist, sehen wir aus den Gleichungen $(\beta\sigma)^{-1}\alpha(\beta\sigma) = \gamma$ und $\alpha\gamma\alpha^{-1}(\beta\sigma) = \sigma$, dass sogar $H = \langle\alpha,\beta\sigma\rangle$ —

4. Die Ordnung des Produkts und das Produkt der Ordnungen

Sei G eine Gruppe, $a,b \in G$ zwei kommutierende Elemente mit $m = \operatorname{ord}(a)$ und $n = \operatorname{ord}(b)$. Wir fragen uns, welche Aussagen über die Ordnung $\operatorname{ord}(ab)$ möglich sind.

4.1. Man zeige $\operatorname{ord}(ab) \mid \operatorname{kgV}(m,n)$ und finde ein Beispiel mit $\operatorname{ord}(ab) < \operatorname{kgV}(m,n)$.

Lösungshinweise: — *Es ist $kgV(m,n) = lm = kn$ für geeignete $l,k \in \mathbb{N}$. Damit gilt aber $(ab)^{kgV(m,n)} = (a^m)^l(b^n)^k = 1$, weil a und b kommutieren. Also ist die Ordnung von ab ein Teiler von $kgV(m,n)$ nach dem Satz von Lagrange.*
Wählt man $b = a^{-1}$, so erhält man das gesuchte Beispiel für $\operatorname{ord}(ab) < \operatorname{kgV}(m,n)$. —

4.2. Wenn $G = A \times B$ mit $a \in A$ und $b \in B$, dann gilt $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{kgV}(m,n)$.

Lösungshinweise: — *Damit für ein Element $(a,b) = (a,1)(1,b)$ eine Potenz $(a,b)^k = (a^k,b^k)$ gleich $(1,1)$ wird, muss jeder Eintrag zu 1 werden. Also ist k ein Vielfaches von n und von m. Das kleinste solche Vielfache ist aber gerade das* kgV *und damit ist es dann die Ordnung des Elementes.* —

S 4.3. (3 Punkte) Wenn $\operatorname{ggT}(m,n) = 1$, dann gilt $\operatorname{ord}(ab) = mn$.
Hinweis: Bézout und Lagrange.

Lösungshinweise: — *Es gilt nach Aufgabe 4.1, dass* $\operatorname{ord}(ab) \mid \operatorname{kgV}(m,n)$. *Wir müssen also nur noch* $\operatorname{ord}(ab) \geq \operatorname{kgV}(m,n)$ *zeigen.*
Wegen $\operatorname{ggT}(m,n) = 1$ gibt es $u,v \in \mathbb{Z}$ mit $1 = un + vm$ (Bézout). Es ist $(ab)^{un} = a^{1-mv}(b^n)^u = a$ und $(ab)^{vm} = b$, also enthält die von ab erzeugte Untergruppe sowohl a, als auch b. Damit muss die Gruppenordnung

durch m und n teilbar sein (Lagrange). Da $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$ teilt sogar mn die Ordnung $\mathrm{ord}(ab)$, was zu zeigen war.
Alternativ sei $(ab)^k = 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $c := a^k = b^{-k}$ im Schnitt der von a und b erzeugten Untergruppen enthalten. Die Ordnung von c ist damit ein Teiler von n und von m, also folgt daraus wegen $ggT(n,m) = 1$, dass c Ordnung eins hat, oder anders gesagt $a^k = b^{-k} = 1$. Damit ist k ein Vielfaches von n und von m, insbesondere $k \geq \mathrm{kgV}(m,n)$, was zu zeigen war. —

4.4. Man konstruiere ein nicht-kommutatives Beispiel, wo $\mathrm{ord}(xy)$ nicht mn teilt. Ist dann $\mathrm{ord}(x) = \mathrm{ord}(y) = 2$ und $\mathrm{ord}(xy) = k$ für jedes $k \geq 1$ möglich?

Lösungshinweise: — *Die Diedergruppe D_n wird von Spiegelungen erzeugt, wie man einsehen kann, indem man die Drehung um $\frac{2\pi}{n}$ als Komposition zweier Spiegelungen schreibt (zuerst an der x-Achse und danach an der Diagonalen, die durch die Mitte der ersten Seite geht). Spiegelungen haben immer Ordnung zwei, während die Drehungen in D_n Ordnung n haben. Also ist die Aussage der Aufgabe für alle k richtig.*
—

5. p-Gruppen

V 5.1. Sei G eine Gruppe. Wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist, dann ist G abelsch.

Lösungshinweise: — *Seien $g,h \in G$. Die beiden Nebenklassen $gZ(G)$ und $hZ(G)$ sind Potenzen eines Elementes $uZ(G)$, da $G/Z(G)$ zyklisch ist. Also gilt $g = u^n z_1$ und $h = u^m z_2$ für $z_i \in Z(G)$. Nun rechnet man leicht nach, dass $gh = hg$ gilt und somit ist G abelsch.* —

Im Folgenden sei p eine Primzahl.

5.2. Zeigen Sie, dass alle Gruppen der Ordnung p^2 abelsch sind und geben Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen mit p^2 Elementen an.

Lösungshinweise: — *Wir wissen, dass jede Gruppe G der Ordnung p^2 ein nichttriviales Zentrum $Z(G)$ besitzt. Dieses ist ein Normalteiler und die Gruppe $G/Z(G)$ hat damit Ordnung 1 oder p, ist also zyklisch. Damit ist G nach Aufgabe 5.1 abelsch. Die beiden abelschen Gruppen sind $\mathbb{Z}/_{p^2}$ und $(\mathbb{Z}/_p)^2$.* —

5.3. (a) Zeigen Sie, die Menge der Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $a,b,c \in \mathbb{Z}/_p$ eine Untergruppe $G < GL_3(\mathbb{Z}/_p)$ der Ordnung p^3 bilden. Bestimmen Sie das Zentrum von G.
(b) Zeigen Sie, dass auch die Menge der Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1+pa & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $a,b \in \mathbb{Z}/_{p^2}$ eine Untergruppe $H < GL_2(\mathbb{Z}/_{p^2})$ der Ordnung p^3 bilden und bestimmen Sie das Zentrum von H.
(c) Sind die Gruppen G und H isomorph?

Lösungshinweise: —

(a) *Dies prüft man direkt nach. Das Zentrum besteht aus den Matrizen mit $a = c = 0$.*
(b) *Rechnet man auch direkt nach. Das Zentrum sind die Matrizen mit $a = 0$ und $p \mid b$.*
(c) *In H hat das Element $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Ordnung p^2, während in G alle Elemente die Ordnung p besitzen. Damit können G und H also nicht isomorph sein.*

—

Bemerkung: Jede Gruppe der Ordnung p^3 $(p \neq 2)$ ist entweder abelsch oder isomorph zu einer der obigen Gruppen G oder H.