Übungsblatt 8: Gruppen und Symmetrien

1. Symmetrische und alternierende Gruppen

1.1. Es gilt $\mathrm{S}_n = \langle (1,2),(2,3),\dots,(n-1,n)\rangle$. Ebenso gilt $\mathrm{S}_n = \langle (1,2),(1,3),\dots,(1,n)\rangle$.

S 1.2. (3 Punkte) Finden Sie einen 2-Zykel $\tau \in \mathrm{S}_n$ und einen n-Zykel $\sigma \in \mathrm{S}_n$, die zusammen die symmetrische Gruppe $\mathrm{S}_n = \langle \tau, \sigma\rangle$ erzeugen und weisen Sie dies nach. Erzeugen $\tau = (1,3)$ und $\sigma = (1,2,3,4)$ die Gruppe S_4?

S 1.3. (2 Punkte) Sei n eine Primzahl. Man zeige, dass jede Transposition $\tau \in \mathrm{S}_n$ und jeder n-Zykel $\sigma \in \mathrm{S}_n$ die symmetrische Gruppe $\mathrm{S}_n = \langle \tau, \sigma\rangle$ erzeugen.

1.4. Es gilt $A_n = \langle (1,2,3),(2,3,4),\dots,(n-2,n-1,n)\rangle$.

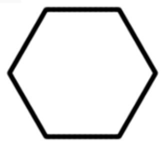
1.5. In A_3 und A_4 sind nicht alle 3-Zykel zueinander konjugiert.

1.6. Man bestimme die möglichen Ordnungen von $\sigma \in S_n$ für $n = 2,\dots,10$.

V 1.7. Zu $\sigma = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 & 10 & 9 & 12 & 11 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{smallmatrix}\right]$ bestimme man die Ordnung des Zentralisators $Z_{\mathrm{S}_{16}}(\sigma)$ und der Konjugationsklasse $\sigma^{\mathrm{S}_{16}}$. Zusatz: Können Sie Elemente angeben, die den Zentralisator erzeugen?

2. Symmetriegruppen

Sei X eine Menge, auf der die Gruppe G operiert und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann nennen wir $\mathrm{stab}(M) := \{g \in G : gM = M\}$ die Symmetriegruppe von M.

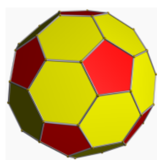


2.1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{stab}(M)$ wirklich eine Gruppe ist.

2.2. Sei $G = O_2(\mathbb{R})$ und P_n das regelmäßige n-Eck ($n \geq 3$) im $\mathbb{R}^2$, d.h. die Menge der Punkte $(\cos(\frac{2\pi k}{n}), \sin(\frac{2\pi k}{n})), 1 \leq k \leq n$. Dann definieren wir die *Diedergruppe* als $D_n := \mathrm{stab}(P_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass D_n genau $2n$ Elemente besitzt.
(b) Stellen Sie D_4 als Untergruppe von S_4 dar.
(c) Zeigen Sie, dass die Gruppe D_n einen Normalteiler der Ordnung n enthält.

2.3. Überlegen Sie sich, dass die Symmetriegruppe des regelmäßigen Tetraeders gerade S_4 ist. Welche Untergruppe ergibt sich, wenn man sich auf die orientierungserhaltenden Abbildungen (Drehungen) einschränkt?

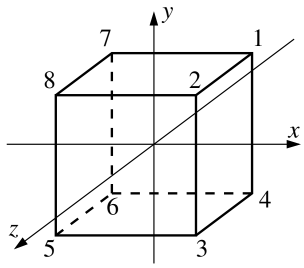


V 2.4. Bestimmen Sie mit Hilfe der Bahnengleichung die Ordnung der Symmetriegruppe des Fussballs (in $SO_3(\mathbb{R})$).

3. Symmetriegruppe des Würfels

Sei H die Isometriegruppe des Würfels (Drehungen und Spiegelungen) und sei H^+ die Untergruppe der orientierungstreuen Isometrien (Drehungen). Seien α, β, γ die Drehungen um den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ um die Achsen x, y, z, und sei σ die Punktspiegelung am Ursprung. (Ist dies eine Drehung oder eine Spiegelung?)

V 3.1. Wir betrachten die Operation von H^+ auf den 8 Ecken. Was ist für eine gegebene Ecke die Bahn und was die Standgruppe? Man bestimme hieraus die Ordnungen der Gruppen H^+ und H. Die Operation induziert einen Gruppenhomomorphismus $H \to S_8$. Ist dieser injektiv? surjektiv? Man zerlege die Aktion von $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ in disjunkte Zykel.



S 3.2. (4 Punkte) Man untersuche ebenso die Operation von H^+ bzw. H auf den 4 Diagonalen $D_1 = \{1,5\}$, $D_2 = \{2,6\}$, $D_3 = \{3,7\}$, $D_4 = \{4,8\}$. Was sind Bild und Kern von $H^+ \to S_4$ und $H \to S_4$? Ist die Untergruppe $\langle\sigma\rangle$ normal in H? Ist sie zentral?

3.3. Man berechne $\alpha\beta\alpha^{-1}$ und $\alpha^{-1}\beta\alpha$ in einer der vorhergehenden Darstellungen. Gilt $H^+ = \langle\alpha,\beta\rangle$? Gilt $H = \langle\alpha,\beta,\sigma\rangle$? Gilt gar $H = \langle\alpha,\beta\sigma\rangle$?

4. Die Ordnung des Produkts und das Produkt der Ordnungen

Sei G eine Gruppe, $a,b \in G$ zwei kommutierende Elemente mit $m = \operatorname{ord}(a)$ und $n = \operatorname{ord}(b)$. Wir fragen uns, welche Aussagen über die Ordnung $\operatorname{ord}(ab)$ möglich sind.

4.1. Man zeige $\operatorname{ord}(ab) \mid \operatorname{kgV}(m,n)$ und finde ein Beispiel mit $\operatorname{ord}(ab) < \operatorname{kgV}(m,n)$.

4.2. Wenn $G = A \times B$ mit $a \in A$ und $b \in B$, dann gilt $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{kgV}(m,n)$.

S 4.3. (3 Punkte) Wenn $\operatorname{ggT}(m,n) = 1$, dann gilt $\operatorname{ord}(ab) = mn$.
Hinweis: Bézout und Lagrange.

4.4. Man konstruiere ein nicht-kommutatives Beispiel, wo $\operatorname{ord}(xy)$ nicht mn teilt.
Ist dann $\operatorname{ord}(x) = \operatorname{ord}(y) = 2$ und $\operatorname{ord}(xy) = k$ für jedes $k \geq 1$ möglich?

5. p-Gruppen

V 5.1. Sei G eine Gruppe. Wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist, dann ist G abelsch.

Im Folgenden sei p eine Primzahl.

5.2. Zeigen Sie, dass alle Gruppen der Ordnung p^2 abelsch sind und geben Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen mit p^2 Elementen an.

5.3. (a) Zeigen Sie, die Menge der Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $a,b,c \in \mathbb{Z}/_p$ eine Untergruppe $G < GL_3(\mathbb{Z}/_p)$ der Ordnung p^3 bilden. Bestimmen Sie das Zentrum von G.

(b) Zeigen Sie, dass auch die Menge der Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1+pa & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $a,b \in \mathbb{Z}/_{p^2}$ eine Untergruppe $H < GL_2(\mathbb{Z}/_{p^2})$ der Ordnung p^3 bilden und bestimmen Sie das Zentrum von H.

(c) Sind die Gruppen G und H isomorph?

Bemerkung: Jede Gruppe der Ordnung p^3 $(p \neq 2)$ ist entweder abelsch oder isomorph zu einer der obigen Gruppen G oder H.