Übungsblatt 7: Gruppen und Normalformen

1. Abelsche Gruppen

1.1. Sei $\nu(n)$ die Anzahl der Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung n.
(a) ν ist multiplikativ, d.h. $\nu(nm) = \nu(n)\nu(m)$ für $\mathrm{ggT}(n,m) = 1$.
(b) Sei $p(k) = \#\{(a_1,\dots,a_m) : m \in \mathbb{N}, 1 \le a_1 \le \dots \le a_m, \sum_{i=1}^m a_i = k\}$ die Anzahl der Partitionen von $k \in \mathbb{N}$. Für Primzahlen q gilt $\nu(q^k) = p(k)$.
(c) Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung n, für alle $n \le 60$.
(d) Man bestimme alle abelschen Gruppen der Ordnung 8000 bis auf Isomorphie.

1.2. Man formuliere und beweise, in welchem Sinne die Zerlegung in unzerlegbare abelsche Gruppen maximal ist. Man formuliere und beweise, in welchem Sinne die Zerlegung in Elementarteilerform minimal ist.

1.3. Die Gruppen $\mathbb{Z}/_5^\times$ und $\mathbb{Z}/_8^\times$ und $\mathbb{Z}/_{12}^\times$ sind alle der Ordnung 4. Man finde ihre Darstellung in Normalteilerform bzw. ihre Zerlegung in unzerlegbare Gruppen.

S 1.4. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(a) Die Gruppe G ist abelsch.
(b) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $\varphi_n : G \to G, g \mapsto g^n$ ein Gruppenhomomorphismus.
(c) Die Abbildung $\varphi_{-1} : G \to G, g \mapsto g^{-1}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
(d) Die Abbildung $\varphi_2 : G \to G, g \mapsto g^2$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

2. Untergruppen und Normalteiler

Seien im Folgenden G,H Gruppen und $U,V < G$ Untergruppen.

2.1. Wenn $U \cup V$ eine Untergruppe ist, dann gilt schon $U \subset V$ oder $V \subset U$.

S 2.2. (2 Punkte) Jede Untergruppe vom Index zwei ist normal.
Jede normale Untergruppe von Ordnung zwei ist zentral (d.h. in $Z(G)$ enthalten).

2.3. (a) Sei $G \times H$ das Produkt der Gruppen G und H. Dann sind $N = G \times \{1\}$ und $M = \{1\} \times H$ Normalteiler mit $N \cap M = \{1\}$ und $MN = G \times H$.
(b) Seien nun $N, M \lhd G$ Normalteiler mit $N \cap M = \{1\}$ und $NM = G$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $G \cong N \times M$.

V 2.4. Eine Untergruppe $U < G$ heißt *charakteristisch* in G, wenn für alle Automorphismen $f : G \to G$ gilt, dass $f(U) = U$.
(a) Zeigen Sie, dass jede charakteristische Untergruppe U normal ist.
(b) Finden Sie eine normale Untergruppe, die nicht charakteristisch ist.
(c) Zeigen Sie, dass das Zentrum $Z(G)$ charakteristisch in G ist.
(d) Zeigen Sie, dass die Kommutatoruntergruppe $[G,G]$ charakteristisch in G ist.
(e) Sei K charakteristisch in H und H charakteristisch in G. Ist dann K charakteristisch in G?
(f) Sei K normal in H und H normal in G. Ist dann K normal in G?

3. Elementarteilersatz und Jordan–Normalform

Sei K ein Körper und sei $P = X^n + p_{n-1}X^{n-1} + \dots + p_0$ ein Polynom in $K[X]$. Den $K[X]$-Modul $U = K[X]/(P)$ können wir vermöge $K \subset K[X]$ als K-Vektorraum auffassen. Die Multiplikation mit X definiert eine K-lineare Abbildung $\varphi\colon U \to U$.

V 3.1. Man zeige $\dim_K(U) = n$. Man zeige, dass sich φ bezüglich der Basis $(1, X, \dots, X^{n-1})$ darstellt als die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -p_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -p_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Eine solche Matrix heißt *Begleitmatrix* von P oder *rationale Normalform* von φ.

Man bestimme das charakteristische Polynom $\det(X 1_{n\times n} - B)$ der Matrix B.

S 3.2. (2 Punkte) Sei nun speziell $P = (X-a)^n$. Man bestimme eine Basis von U über K, bezüglich der sich φ darstellt als die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Eine solche Matrix heißt *Jordanblock* oder *Jordan–Normalform* von φ.

Sei nun V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) < \infty$. Gegeben sei eine K-lineare Abbildung $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Hierdurch wird V zu einem $K[X]$-Modul mit der Operation $K[X] \times V \to V$ gegeben durch $(P, v) \mapsto P(\varphi)(v)$.

Der Elementarteilersatz beschert uns nun einen $K[X]$-Modulisomorphismus

$$V \cong K[X]/(P_1) \times \cdots \times K[X]/(P_m) \tag{1}$$

wobei $P_1, \dots, P_m$ normierte Polynome in $K[X]$ sind mit $P_1 \mid \cdots \mid P_m$.

V 3.3. Folgern Sie hieraus, dass es eine K-Basis von V gibt, bezüglich der sich φ darstellt als eine Blockdiagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_m \end{pmatrix}$$

wobei die Matrizen $B_1, \dots, B_m$ in rationaler Normalform sind.

Man bestimme das charakterische Polynom von φ.

Mittels des chinesischen Restsatzes erhalten wir aus (1) einen $K[X]$-Modulisomorphismus $V \cong K[X]/(Q_1) \times \cdots \times K[X]/(Q_s)$, wobei jedes Q_i Potenz eines normierten irreduziblen Polynoms in K[X] ist. Dabei ist $Q_1 \cdots Q_s$ das charakteristische Polynom von φ.

S 3.4. (2 Punkte) Nehmen wir an, dass das charakteristische Polynom von φ über K in Linearfaktoren zerfällt. (Zum Beispiel ist dies immer der Fall für $K = \mathbb{C}$.) Zeigen Sie, dass es eine K-Basis von V gibt, bezüglich der sich φ darstellt als eine Blockdiagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$$

wobei die Matrizen $J_1, \dots, J_s$ Jordanblöcke sind.

3.5. Sei R ein Ring und M ein R-Linksmodul. Zeigen Sie, dass der Annihilator

$$\mathrm{ann}_R(M) := \{\, r \in R : rm = 0 \text{ für alle } m \in M \,\}$$

ein Linksideal in R ist. Bestimmen Sie zum Beispiel $\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_6)$.

S 3.6. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass in (1) $\mathrm{ann}_{K[X]}(V) = (P_m)$ gilt.
Damit ist P_m das Minimalpolynom von φ.