Übungsblatt 6: Matrizen und Moduln

1. Moduln

1.1. Sei R ein Ring, M ein R-Linksmodul und X eine Menge. Zeigen Sie, dass die Menge M^X der Abbildungen von X nach M zu einem R-Linksmodul wird, wenn man wie üblich die Addition von Abbildungen durch $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ und die Multiplikation mit Elementen $r \in R$ durch $(rf)(x) := rf(x)$ definiert.

Zeigen Sie, dass die Menge $M^{(X)}$ der Abbildungen von X nach M mit endlichem Träger ein Untermodul von M^X ist.

1.2. Jeder Ring R ist auf natürliche Weise ein Linksmodul über sich selbst. Zeigen Sie, dass $I \subset R$ genau dann ein Linksideal ist, wenn es ein R-Linksmodul ist.

1.3. Kann $\mathbb{Z}/_2$ zu einem $\mathbb{Z}/_4$-Modul gemacht werden?
Kann umgekehrt $\mathbb{Z}/_4$ zu einem $\mathbb{Z}/_2$-Modul gemacht werden?

S 1.4. (4 Punkte) Wir betrachten im Folgenden $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul.
- (a) Ist $\mathbb{Q}$ endlich erzeugt?
- (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ nicht frei ist.
- (c) Zeigen Sie, dass es in $\mathbb{Q}$ eine unendliche, echt aufsteigende Kette von Untermoduln $M_1 < M_2 < \ldots < \mathbb{Q}$ gibt.
- (d) Jeder endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Q}$ ist frei vom Rang 1.

Bemerkung: Man nennt einen Modul M *noethersch*, wenn jede echt aufsteigende Kette $M_1 < M_2 < \ldots < M$ von Untermoduln endlich ist. $\mathbb{Q}$ ist als $\mathbb{Z}$-Modul also nicht noethersch.

1.5. Zeigen Sie, dass alle $\mathbb{Z}$-Moduln $M \subset \mathbb{R}$ entweder dicht oder diskret sind. Dabei heißt *diskret*, dass es zu jedem Element $m \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass $M \cap U = \{m\}$ gilt. *Dicht* bedeutet, dass zu jeder Zahl $r \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ stets ein $m \in M$ existiert, so dass $|r-m| < \varepsilon$.
Angenommen $M \subset \mathbb{R}$ ist diskret, welchen Rang kann M dann haben?

1.6. Zeigen Sie, dass $\{3,5\}$ ein minimales Erzeugendensystem des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}$ ist (in dem Sinne, dass man kein Element weglassen kann), aber keine Basis. Können Sie auch eine 3-elementige Menge angeben, die ein minimales Erzeugendensystem bildet? (Eine n-elementige Menge für beliebiges n?)

2. Diverse Gegenbeispiele

Untermoduln eines freien Moduls sind nicht notwendig frei:

S 2.1. (3 Punkte) Sei K ein Körper und sei $R = K[X,Y]$ der Polynomring in den Variablen X,Y. Als R-Modul ist R frei mit Basis 1. Das Ideal (X,Y) ist als R-Untermodul nicht frei.

Wenn ein Untermodul U eines freien Moduls M selbst wieder frei ist, dann muss nicht unbedingt $\operatorname{rang} U \leq \operatorname{rang} M$ gelten:

2.2. Sei $M = \{X,Y\}^*$ das freie Monoid bestehend aus allen endlichen Wörtern über dem Alphabet $\{X,Y\}$. Sei K ein Körper und sei $R = KM$ der nicht-kommutative Polynomring in den Variablen X,Y. Als R-Linksmodul ist R frei mit Basis 1. Man konstruiere einen freien Untermodul $U \subset R$ vom Rang 2.

Man würde erwarten, dass in einem endlich erzeugten K-Modul jeder Untermodul $U \subset M$ über K endlich erzeugt ist. Dies gilt nicht für beliebige Ringe:

2.3. Sei $R = K[X_n \mid n \in \mathbb{N}]$ der Polynomring über einem Körper K in unendlich vielen Variablen $X_0, X_1, X_2, \dots$. Als R-Modul ist R frei vom Rang 1, also insbesondere endlich erzeugt. Das Ideal $(X_n \mid n \in \mathbb{N})$ ist als R-Untermodul nicht endlich erzeugt.

3. Elementarteiler

V 3.1. Bringen Sie über $\mathbb{Z}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \\ -6 & -3 & -9 & -6 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

in Elementarteilerform. Zusatz: Geben Sie hierzu Matrizen $S, S^{-1}, T, T^{-1} \in GL_4(\mathbb{Z})$ an, so dass $SAT = D$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen $d_1 \mid \cdots \mid d_4$ ist.

4. Matrizenringe

4.1. Sei R ein Ring und $S = R^{n \times n}$ der Matrizenring über R. Daraus kann man nun wiederrum den Ring $T = S^{m \times m}$ bauen. Ist T isomorph zu $R^{nm \times nm}$?

4.2. Sei R ein Ring und $S = R^{n \times n}$ der Matrizenring über R. Bestimmen Sie das Zentrum $Z(S) = \{A \in S : AB = BA \text{ für alle } B \in S\}$ von S.

S 4.3. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Spalten einer Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ genau dann eine Basis von $\mathbb{Z}^n$ sind, wenn $\det(A) = \pm 1$ gilt. (Was gilt entsprechend über einem beliebigen kommutativen Ring?)

5. Dimensionsinvarianz

Dass die “Dimensionsinvarianz” nicht selbstverständlich ist, zeigt bereits der Nullring $R = \{0\}$: hier ist R^n der Nullmodul für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gibt aber auch nicht-triviale Ringe R sodass $R^n \cong R^m$ für $n \neq m$ als R-Moduln isomorph sind:

5.1. Sei K ein Körper und $R = \operatorname{End}_K(K[X])$ der Ring der K-linearen Abbildungen $K[X] \to K[X]$. Man konstruiere einen Isomorphismus $R^2 \cong R$ von R-Linksmoduln.

Hinweis: Seien $f_0, f_1 \in R$ definiert durch $f_i(X^k) = X^{(k-i)/2}$ für $k - i$ gerade und $f_i(X^k) = 0$ sonst. Ist f_0, f_1 eine Basis von R über sich selbst? Kann man ebenso eine Basis von R mit beliebiger Länge $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ herstellen?

Wir wollen zeigen, dass solche Pathologien über kommutativen Ringen nicht möglich sind. Sei dazu im Folgenden R ein kommutativer Ring und $I \lhd R$ ein Ideal.

V 5.2.
(a) Zu jedem R-Modul M ist $IM := \{\sum_{k=1}^n a_k m_k : a_k \in I, m_k \in M\}$ ein Untermodul von M.
(b) Wir wissen, dass M/IM ein Modul über R ist. Zeigen Sie, dass M/IM auch ein Modul über R/I wird, wenn man $(r+I)(m+IM) := (rm+IM)$ definiert.
(c) Im Fall $M = R^n$ konstruiere man einen Isomorphismus $R^n/IR^n \cong (R/I)^n$.

Wir setzen im Folgenden als bekannt voraus, dass jeder kommutative Ring mit $1 \neq 0$ ein maximales Ideal $I \subset R$ besitzt. Der Quotientenring R/I ist dann ein Körper.

V 5.3. Sei R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Zeigen Sie, dass aus einem Isomorphismus $R^m \cong R^n$ von R-Moduln die Gleichheit $m = n$ folgt.