Übungsblatt 5: Primfaktorzerlegung in Polynomringen

"Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen."
— Johann Wolfgang von Goethe, Faust I

1. Inhalt und ggT

S 1.1. (2 Punkte) Man bestimme den Inhalt von $P = X^3Y + X^3 + X^2Y^2 - X^2 + XY^3 - XY$ in $\mathbb{Q}[Y][X]$ und anschließend in $\mathbb{Q}[X][Y]$.

Lösungshinweise: — *Es ist* $P = (Y+1)X^3 + (Y^2-1)X^2 + (Y^3-Y)X \in \mathbb{Q}[Y][X]$ *und* $P = XY^3 + X^2Y^2 + (X^3+X)Y + (X^3-X^2) \in \mathbb{Q}[X][Y]$. *Es ist damit* $\operatorname{cont}(P) = ggT(Y+1, Y^2-1, Y^3-Y) = Y+1$ *in* $\mathbb{Q}[Y][X]$ *und* $\operatorname{cont}(P) = ggT(X, X^2, X^3+X, X^3-X^2) = X$ *in* $\mathbb{Q}[X][Y]$. —

V 1.2. Man berechne den ggT folgender Polynome (vgl. Algorithmus 6 im Skript):

(a) $P = 24X^3 - 81$ und $Q = 24X^2 - 72X + 54$ in $\mathbb{Z}[X]$.
Hinweis: Man bestimme den ggT zuerst in $\mathbb{Q}[X]$ und schließe auf $\mathbb{Z}[X]$.

(b) $P = X^3Y^3 + X^4Y - X^2Y^2 - X^3$ und $Q = X^2Y^3 - X^4Y - XY^2 + X^3$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$.
Hinweis: Man bestimme den ggT zuerst in $\mathbb{Q}(X)[Y]$ und schließe auf $\mathbb{Q}[X][Y]$.

(c) In beiden Fällen zerlege man P und Q in irreduzible Faktoren.
Primfaktorzerlegungen sind im Allgemeinen schwer. Daher ein *Hinweis:* Man berechne zunächst $P(-Y^2, Y)$ sowie $Q(X,X)$ und $Q(X,-X)$.

Lösungshinweise: — *Man vergleiche mit Algorithmus 6 aus der Vorlesung!*

(a) *Über* $\mathbb{Z}$ *ist* $\operatorname{cont}(P) = 3$ *und* $\operatorname{cont}(Q) = 6$. *Es genügt also den reduzierten* $ggT(P,Q)$ *über* $\mathbb{Q}[X]$ *zu bestimmen und anschließend mit* $ggT(3,6) = 3$ *zu multiplizieren. Damit reicht es* P *und* Q *durch* $P' = P/3$ *und* $Q' = Q/6$ *zu ersetzen, um die Rechnung einfacher zu halten.*
Es gilt $P' = Q'(2X+6X) + 54X - 81$. *Weiter folgt nun* $Q' = (54X-81)(\frac{2}{27}X - \frac{1}{9}) + 0$. *Also ist* $R = 54X - 81$ *ein ggT von* P *und* Q *in* $\mathbb{Q}(X)[Y]$. *Reduzieren ergibt* $2X-3$ *und Multiplikation mit dem ggT der Inhalte liefert* $ggT(P,Q) = 3(2X-3)$ *in* $\mathbb{Z}[X]$.

(b) *Über* $\mathbb{Q}[X]$ *gilt* $\operatorname{cont}(P) = X^2$ *und* $\operatorname{cont}(Q) = X$. *In* $\mathbb{Q}(X)[Y]$ *erhalten wir mit dem euklidischen Algorithmus* $P = Q \cdot X + R$ *mit* $R = (X^5 + X^4)Y - (X^4 + X^3)$, *und schließlich* $Q = R \cdot \frac{Y^2 - X^2}{X^3 + X^2} + 0$.
Also ist R *ein ggT von* P *und* Q *in* $\mathbb{Q}(X)[Y]$. *Wir haben* $\operatorname{cont}(R) = X^4 + X^3$ *und somit* $\operatorname{red}(R) = XY - 1$. *Der ggT von* P *und* Q *in* $\mathbb{Q}[X,Y]$ *ist demnach* $XY-1$ *multipliziert mit dem ggT der Inhalte* X, *also* $ggt(P,Q) = X(XY-1)$.

(c) *Man findet in (a):* $P = 3(2X-3)(4X^2+6X+9)$ *und* $Q = 3(2X-3)(X-6)$. *Das auftretende Polynom* $4X^2 + 6X + 9 = (X+3)^2 + 3X^2$ *ist stets positiv und hat damit in* $\mathbb{R}$ *keine Nullstelle. Also ist es über* $\mathbb{Q}$ *irreduzibel wegen der Primitivität folglich auch über* $\mathbb{Z}$.
In (b) ergibt sich $P = X^2(XY-1)(Y^2+X)$ *und* $Q = X(XY-1)(Y+X)(Y-X)$, *wenn man den Hinweis auswertet. Die angegebenen Faktoren sind irreduzibel in* $\mathbb{Q}[X,Y]$.

—

2. Das Reduktionsverfahren und seine Grenzen

2.1. Man bestimme alle irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 3 über $\mathbb{Z}/2$ und $\mathbb{Z}/3$.

Lösungshinweise: — *Über einem Körper* K *gilt: Polynome vom Grad* 1 *sind irreduzibel, und Polynome vom Grad* 2 *oder* 3 *sind genau dann irreduzibel, wenn sie keine Nullstelle in* K *besitzen. Man muss also die Polynome alle systematisch aufschreiben und prüfen, ob diese eine Nullstelle haben. Es ergibt sich als Lösung in* $\mathbb{Z}/2$*:*

$$X,\ X+1,\ X^2+X+1,\ X^3+X+1,\ X^3+X^2+1$$

In $\mathbb{Z}/3$ verwenden wir, dass das Negative eines irreduziblen Polynoms wieder irreduzibel ist. Wir geben hier nur die normierten Polynome an, das heißt mit 1 als Leitkoeffizient:

$$X,\quad X+1,\quad X+2,$$
$$X^2+1,\quad X^2+X-1,\quad X^2-X-1,$$
$$X^3-X+1,\quad X^3-X-1,\quad X^3+X^2-1,\quad X^3-X^2+1,$$
$$X^3+X^2-X+1,\quad X^3+X^2+X-1,\quad X^3-X^2-X-1,\quad X^3-X^2+X+1.$$

—

S 2.2. (2 Punkte) Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$?

(a) $X^3+14X^2+19X+25$
(b) $X^3+35X^2+18X+45$
(c) $X^3+5X^2+7X+13$

Lösungshinweise: — *Modulo 2 entsprechen die ersten beiden Polynome X^3+X+1 und X^3+X^2+1. Diese haben in $\mathbb{Z}/2$ keine Nullstelle. Das dritte Polynom ist in $\mathbb{Z}/3$ gleich X^3-X^2+X+1 und mit dem kleinen Satz von Fermat kann man das sogar noch zu $-X^2-X+1$ vereinfachen. Dies hat keine Nullstelle in $\mathbb{Z}/3$.*
Da die Polynome Grad ≤ 3 haben, sind sie damit über den Körpern $\mathbb{Z}/2$ bzw. $\mathbb{Z}/3$ irreduzibel. Da die führenden Koeffizienten jeweils 1 sind, greift Proposition 6G14 und liefert die Irreduzibilität über $\mathbb{Z}$. —

2.3. Man zerlege X^4+1 in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Z}/2[X]$, $\mathbb{Z}/3[X]$.

Lösungshinweise: — *Es sind $X^4+1=(X^2-i)(X^2+i)=(X-\frac{1+i}{\sqrt{2}})(X+\frac{1+i}{\sqrt{2}})(X-\frac{1-i}{\sqrt{2}})(X+\frac{1-i}{\sqrt{2}})=(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)$ die Zerlegungen über $\mathbb{C}$ bzw $\mathbb{R}$. Über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ ist das Polynom irreduzibel, da die Transformation $X\mapsto X+1$ auf das Polynom $X^4+4X^3+6X^2+4X+2$ führt, was man mit Eisenstein als irreduzibel erkennen kann. Man kann alternativ aber auch nachprüfen, dass kein Teilprodukt der komplexen Faktoren zu einem rationalen Polynom führt. Über $\mathbb{Z}/2$ zerfällt es in $(X+1)^4$ und über $\mathbb{Z}/3$ in $(X^2+X-1)(X^2-X-1)$ und die Faktoren sind irreduzibel nach Aufgabe 2.1.* —

Wir wollen zeigen, dass das Polynom $Q=X^4+1\in\mathbb{Z}/p[X]$ für jede Primzahl p nicht irreduzibel ist.

2.4. Zeigen Sie dazu:

(a) Gibt es ein $a\in\mathbb{Z}/p[X]$ mit $a^2=-1$, dann ist $Q\in\mathbb{Z}/p[X]$ nicht irreduzibel.
(b) Gibt es ein $b\in\mathbb{Z}/p[X]$ mit $b^2=2$, dann ist $Q\in\mathbb{Z}/p[X]$ nicht irreduzibel.
(c) Gibt es ein $c\in\mathbb{Z}/p[X]$ mit $c^2=-2$, dann ist $Q\in\mathbb{Z}/p[X]$ nicht irreduzibel.
(d) In $\mathbb{Z}/p$ ist mindestens eine der drei Zahlen $-2,-1,2$ ein Quadrat.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $x\in\mathbb{Z}/p^*$ für $p\neq 2$ genau dann ein Quadrat in $\mathbb{Z}/p$ ist, wenn $x^{\frac{p-1}{2}}=1$ und ein Nichtquadrat, wenn $x^{\frac{p-1}{2}}=-1$.
Zusatz: Wie folgt der Hinweis aus dem kleinen Satz von Fermat?

Somit gibt es Polynome in $\mathbb{Z}[X]$, welche nicht mit dem Reduktionskriterium modulo p als irreduzibel erkannt werden können, obwohl sie irreduzibel sind.

Lösungshinweise: —

(a) *Es gilt in diesem Fall $X^4+1=(X^2+a)(X^2-a)$*
(b) *Hier ergibt sich $X^4+1=(X^2+bX+1)(X^2-bX+1)$*
(c) *und schließlich $X^4+1=(X^2+cX-1)(X^2-cX-1)$.*

(d) *Wenn die Zahlen* -1 *und* 2 *keine Quadrate sind, dann gilt* $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$ *und* $2^{\frac{p-1}{2}} = -1$*, aber durch Multiplikation dieser Gleichungen ergibt sich* $(-2)^{\frac{p-1}{2}} = 1$*. Also ist* -2 *ein Quadrat.*

Bemerkung: Das Kriterium im Hinweis greift natürlich nicht für $p = 2$*. Dort wissen wird aber schon, dass* $X^4 + 1$ *reduzibel ist.*
Zusatz: Zuerst zeigen wir, dass der Ausdruck $x^{\frac{p-1}{2}}$ *wirklich nur die Werte* ± 1 *annimmt.*
Der kleine Satz von Fermat liefert $x^p = x$ *für alle* $x \in \mathbb{Z}/p$*. Für alle invertierbaren Elemente* x *bedeutet dies* $x^{p-1} = 1$ *oder* $\left(x^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 = 1$*. Die Gleichung* $y^2 = 1$ *hat aber nur zwei Lösungen in* $\mathbb{Z}/p$*, nämlich* ± 1*.*
Da das Polynom $X^2 - a$ *für* $a \neq 0$ *über* $\mathbb{Z}/p$ *entweder zwei Nullstellen oder keine Nullstelle besitzt, gibt es genausoviele Quadrate wie Nichtquadrate. Die Abbildung* $\varphi : x \mapsto x^{\frac{p-1}{2}}$ *ist ein Gruppenhomomorphismus in die multiplikative Gruppe* $\{\pm 1\}$ *und hat damit ebenfalls gleichgroße Urbilder* $|\varphi^{-1}(1)| = |\varphi^{-1}(-1)|$*. Wenn wir zeigen können, dass für ein Quadrat* $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$ *gilt, muss nach Ausschlussprinzip für Nichtquadrate* -1 *herauskommen.*
Ein Quadrat x *lässt sich aber schreiben als* $x = y^2$ *und somit ergibt sich* $x^{\frac{p-1}{2}} = y^{p-1} = 1$*.* —

3. Zum Kriterium von Eisenstein

S 3.1. (2 Punkte) Man zerlege die folgenden Polynome in $\mathbb{Z}[X]$:
(a) $X^4 - 4X^3 + 6$
(b) $2X^4 - 6X^3 + 12$
(c) $X^3 + nX + 2$ (in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$)

Lösungshinweise: —
(a) *Das erste Polynom ist irreduzibel nach Eisensteinkriterium für* $p = 2$*.*
(b) *Das zweite Polynom ist reduzibel* $2(X^4 - 3X^3 + 6)$*, obwohl es scheinbar das Eisensteinkriterium für* $p = 3$ *erfüllt. Das liegt aber daran, dass eine Voraussetzung beim Anwenden des Kriteriums ist, dass das Polynom primitiv ist. Nach der Ausklammern der* 2 *ist das restliche Polynom allerdings wirklich irreduzibel.*
(c) *Wenn* n *gerade ist, greift Eisenstein für* $p = 2$*. Im ungeraden Fall reicht es zu prüfen, wann Nullstellen auftreten können. Weil der führende Koeffizient* 1 *ist, müssen die Nullstellen Teiler des Absolutgliedes sein. In den anderen Fällen ist das Polynom irreduzibel.*
Die 1 *ist Nullstelle, genau dann, wenn* $1 + n + 2 = 0$*, also* $n = -3$*, die* 2 *ist Nullstelle für* $8 + 2n + 2 = 0$*, also* $n = -5$*. Die* -1 *ist Nullstelle, wenn* $-1 - n + 2 = 0$*, also* $n = 1$ *und* -2 *ist Nullstelle für* $-8 - 2n + 2 = 0$*, also* $n = -3$*. Es ergibt sich die Zerlegung* $(X + 1)(X^2 - X + 2)$ *im Fall* $n = 1$*, da das zweite Polynom in* $\mathbb{Z}/3$ *irreduzibel mit Leitkoeffizient* 1 *ist.*
(Zusatz: $(X + 2)(X - 1)^2$ *im Fall* $n = -3$ *und* $(X - 2)(X^2 + 2X - 1)$ *im Fall* $n = -5$*.)*

—

Für das Kriterium von Eisenstein ist manchmal folgender Trick hilfreich:

3.2. Ein Polynom $P \in R[X]$ ist irreduzibel genau dann wenn $P(X + b)$ es ist.

Lösungshinweise: — *Wenn* $P(X) = S(X)T(X)$ *in* $R[X]$*, dann ist auch* $P(X + b) = S(X + b)T(X + b)$ *und umgekehrt.* —

Dies führt uns zu der Frage nach den Automorphismen des Rings $R[X]$ über R:

3.3. Für $a, b \in R$ existiert genau ein Ringhomomorphismus $\varphi_{a,b} \colon R[X] \to R[X]$ mit $\varphi_{a,b}|_R = \mathrm{id}_R$ und $X \mapsto aX + b$. Man zeige, dass $\varphi_{a,b}$ genau dann ein Automorphismus ist, wenn $a \in R^\times$ gilt. In diesem Falle gebe man $\varphi_{a,b}^{-1}$ explizit an.

Lösungshinweise: — *Ein Ringhomomorphismus φ, der die Koeffizienten nicht verändert, vertauscht mit Polynomen P. Es gilt also stets $\varphi(P(X)) = P(\varphi(X))$. Denn sei $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, dann folgt $\varphi(P(X)) = \varphi(\sum_{i=0}^{k} a_i X^i) = \sum_{i=0}^{k} \varphi(a_i X^i) = \sum_{i=0}^{k} \varphi(a_i)\varphi(X)^i = \sum_{i=0}^{k} a_i \varphi(X)^i = P(\varphi(X))$. Damit ist $\varphi(X)$ eindeutig festgelegt, wenn das Bild von X vorgegeben ist.*
Um zu zeigen, dass $\varphi_{a,b}$ ein Ringhomomorphismus ist, muss man die Additivität und Multiplikativität prüfen. Dies folgt aber sofort aus der obigen Rechenregel: $\varphi(P+Q) = (P+Q)(\varphi) = P(\varphi) + Q(\varphi) = \varphi(P) + \varphi(Q)$ und ebenso für die Multiplikation.
Wenn $a \in R^\times$, dann ist $\varphi_{a,b}$ ein Automorphismus mit Umkehrabbildung $\varphi_{a,b}^{-1}(X) = a^{-1}X - a^{-1}b = \varphi_{a^{-1},-a^{-1}b}(X)$.
Wenn a nicht invertierbar ist, so hat das Polynom X kein Urbild, denn das Bild eines allgemeinen Polynoms $\sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ ist $\sum_{i=0}^{k} a_i (aX+b)^i$. Nach dem Ausmultiplizieren sieht man, dass der Koeffizient vor X den Faktor a enthält. Dieser müsste aber 1 sein, was wegen der Nichtinvertierbarkeit von a unmöglich ist. —

3.4. Sei R ein Integritätsring und sei $\mathrm{Aut}_R(R[X])$ die Gruppe der Ringautomorphismen $\varphi\colon R[X] \xrightarrow{\sim} R[X]$ mit $\varphi|_R = \mathrm{id}_R$. Man zeige $\mathrm{Aut}_R(R[X]) = \{\, \varphi_{a,b} \mid a \in R^\times, b \in R \,\}$.

Lösungshinweise: — *Nach der Lösung der Aufgabe 3.5 gilt für die Automorphismen φ mit $\varphi|_R = \mathrm{id}_R$ dass $\varphi(P(X)) = P(\varphi(X))$. Damit ist φ also durch das Bild von X festgelegt. Wir machen den Ansatz $\varphi(X) = Q(X)$ mit einem festen Polynom $Q(X)$.*
Es gilt dann für ein beliebiges Polynom $P(X)$, dass $\varphi(P(X)) = P(\varphi(X)) = P(Q(X))$. Da R ein Integritätsring ist, ist der Grad von $P(Q(X))$ das Produkt der Grade von P und Q (solange nicht beide Polynome 0 sind). Damit das Polynom X im Bild von φ liegt, muss also Q Grad 1 haben, also von der Form $aX+b$ sein. Aus Aufgabe 3.5 folgt dann, dass $a \in R^\times$ sein muss. —

4. Reduzible und irreduzible Polynome

In dieser Aufgabe sollen Sie selbst herausfinden, welches Kriterium oder welche Methode am Besten anzuwenden ist. Ein allgemeiner Hinweis: Der Satz von Gauß und die Proposition 6G9 aus dem Skript können auch nützlich sein.

V 4.1. Man zerlege die folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$:

(a) $X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$
(b) $X^3 + 3X^2 + 6X + 5$
(c) $X^3 + 3X^2 + 5X + 6$
(d) $4X^2 + 4X + 1$
(e) $X^4 + 10X^2 + 1$
(f) $9X^3 + 7X + 3$
(g) $3X^5 + 10X^3 + 50X^2 - 40X + 20$
(h) $2X^3 + 3X^2 + 3X + 1$
(i) $X^8 - 1$

Lösungshinweise: — *Alle obigen Polynome haben Inhalt 1. Man kann also die Irreduzibilität über $\mathbb{Z}$ prüfen und erhält die Irreduzibilität über $\mathbb{Q}$ nach Proposition 6G2.*

(a) $X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 = (X+1)^4$
(b) $X^3 + 3X^2 + 6X + 5$ *ist irreduzibel in $\mathbb{Z}/2$ mit Leitkoeffizient 1, also irreduzibel in $\mathbb{Z}$.*
(c) $X^3 + 3X^2 + 5X + 6 = (X+2)(X^2+X+3)$ *und das quadratische Polynom ist wieder irreduzibel in $\mathbb{Z}/2$ mit Leitkoeffizient 1, also irreduzibel in $\mathbb{Z}$*
(d) $4X^2 + 4X + 1 = (2X+1)^2$
(e) *Bei $X^4 + 10X^2 + 1$ setzt man eine Zerlegung der Form $(X^2 + aX \pm 1)(X^2 + bX \pm 1)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ an und zeigt, dass diese nicht möglich ist. Eine Nullstelle in $\mathbb{Z}$ (oder $\mathbb{Q}$) ist auch nicht gegeben, da das Polynom nur positive Werte annimmt.*

(f) $9X^3+7X+3$ *ist irreduzibel in* $\mathbb{Z}/_2$ *mit nicht durch* 2 *teilbarem Leitkoeffizient, also irreduzibel in* $\mathbb{Z}$.
(g) $3X^5+10X^3+50X^2-40X+20$ *ist irreduzibel: Eisenstein zur Primzahl* 5 *funktioniert.*
(h) $2X^3+3X^2+3X+1=(2X+1)(X^2+X+1)$ *und der zweite Faktor ist irreduzibel in* $\mathbb{Z}/_2$ *mit Leitkoeffizient* 1*, also irreduzibel in* $\mathbb{Z}$.
(i) $X^8-1=(X^4+1)(X^2+1)(X+1)(X-1)$. *Der Faktor* X^4+1 *wurde in Aufgabe 2.3 als irreduzibel erkannt und* X^2+1 *hat keine rellen Nullstellen, also auch keine in* $\mathbb{Z}$ *und ist somit als Polynom vom Grad* ≤ 2 *auch irreduzibel.*

—

S 4.2. (2 Punkte) Ist $P=X^2+Y^2-1$ irreduzibel in $\mathbb{C}[X,Y]$? und in $\mathbb{Z}/_2[X,Y]$?

Lösungshinweise: — *Eine Möglichkeit ist das Polynom als* $X^2+(Y+1)(Y-1)$ *in* $\mathbb{C}[Y][X]$ *zu schreiben und das Eisensteinkriterium mit dem Primelement* $Y+1$ *(oder* $Y-1$*) anzuwenden. Dies funktioniert in* $\mathbb{Z}/_2[Y][X]$ *nicht mehr, da die beiden Faktoren* $Y+1$ *und* $Y-1$ *zusammenfallen. Es ist dort in der Tat* $P=(X+Y+1)^2$ *reduzibel.*
Man kann aber auch direkt einen Ansatz der Form $(X+aY+b)(X+cY+d)$ *versuchen (andere Ansätze können durch Normierung in diesen überführt werden oder kommen aus Gradargumenten/Inhaltsgründen nicht in Frage) und zeigen, dass dies über* $\mathbb{C}$ *nicht zum Erfolg führt, wohl aber über* $\mathbb{Z}/_2$. —

S 4.3. (2 Punkte) Man zeige: $\sqrt[n]{a}$ mit $a\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$, ist entweder ganz oder irrational.

Lösungshinweise: — $\sqrt[n]{a}$ *ist als die positive Nullstelle des Polynoms* X^n-a *definiert. Wenn n ungerade ist, so ist das auch die einzige Nullstelle. Für gerades n ist* $-\sqrt[n]{a}$ *ebenfalls eine Nullstelle. Wenn* $\sqrt[n]{a}$ *also nicht ganzzahlig ist, so hat* X^n-a *keine Nullstelle in* $\mathbb{Z}$ *und damit nach Korrolar 6G10 auch keine Nullstelle in* $\mathbb{Q}$. *Oder anders gesagt:* $\sqrt[n]{a}$ *irrational.* —

4.4. Für $n\geq 3$ zerlege man $6X^n-6X^{n-1}+24X^2-36X+12$ in $\mathbb{Z}[X]$ in irreduzible Faktoren.

Lösungshinweise: — *Nach Ausklammern von* $(X-1)$ *entsteht* $2\cdot 3\cdot(X-1)\cdot(X^{n-1}+4X-2)$ *und das hintere Polynom ist nach Eisenstein irreduzibel.* —

4.5. Man zerlege $2X^5-5X^4-21X^3-15X^2-23X-10$ in $\mathbb{Z}[X]$.

Lösungshinweise: — *Als Nullstellen kommen nur Brüche* $\frac{a}{b}$ *in Frage, so dass* $a|10$ *und* $b|2$. *Durch Ausprobieren und Polynomdivision erhält man* $(X-5)(X+2)(2X+1)(X^2+1)$. —