Übungsblatt 12: Abschluss

1. Primitive Elemente

V 1.1. (a) Sei $E|K$ eine endliche Galoiserweiterung. Zeigen Sie (mit Hilfe der Galoiskorrespondenz), dass für $\alpha \in E$ die beiden Aussagen äquivalent sind:
(i) Für alle $\sigma \in \operatorname{Aut}(E|K) \setminus \{\mathrm{id}\}$ gilt $\sigma(\alpha) \neq \alpha$.
(ii) Es gilt $E = K[\alpha]$, d.h. α ist ein primitives Element.
(b) Zeigen Sie $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ direkt durch Mengeninklusionen.
(c) Zeigen Sie $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ mit Hilfe von Teil (a).

1.2. Finden Sie ein primitives Element der Erweiterung $\mathbb{Q}[i, \sqrt[4]{2}]$ über $\mathbb{Q}$.

1.3. Bestimmen Sie alle primitiven Elemente von $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ über $\mathbb{Q}$.

2. Spezielle Erweiterungen

2.1. Sei $E|K$ eine galoissche Körpererweiterung. Wir nennen $E|K$ abelsch, bzw. zyklisch, wenn die Galoisgruppe $\operatorname{Aut}(E|K)$ abelsch bzw. zyklisch ist.
(a) Es sei $E|K$ eine abelsche Galoiserweiterung. Zeige, dass dann für jeden Zwischenkörper F auch $E|F$ und $F|K$ abelsche Galoiserweiterungen sind.
(b) Es sei $E|K$ eine zyklische Galoiserweiterung. Zeige, dass dann für jeden Zwischenkörper F auch $E|F$ und $F|K$ zyklische Galoiserweiterungen sind.

2.2. Zeigen Sie, dass jede Körpererweiterung vom Grad 2 normal ist.

2.3. Welche der folgenden Erweiterungen sind normal?
(a) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ über $\mathbb{Q}$
(b) $\mathbb{Q}[e^{2\pi i/n}]$ über $\mathbb{Q}$
(c) $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$ über $\mathbb{Q}$
(d) $\mathbb{Q}[i][\sqrt[4]{2}]$ über $\mathbb{Q}[i]$

2.4. Sei E eine endliche algebraische Körpererweiterung von K, sodass die Charakteristik p von K den Grad der Körpererweiterung $|E : K|$ nicht teilt. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung separabel ist.
Hinweis: Ein irreduzibles Polynom P ist genau dann separabel, wenn $P' \neq 0$.

3. Inverses Galoisproblem

V 3.1. Der Satz von Dirichlet aus der Zahlentheorie liefert für gegebenes $a \in \mathbb{N}$ unendlich viele Primzahlen der Form $p = 1 + ka$.
(a) Zeigen Sie unter Benutzung dieses Resultats, dass jede endliche zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/_a$ zu einer Quotientengruppe von $\mathbb{Z}/_p^\times$ isomorph ist.
(b) Folgern Sie aus dem chinesischen Restsatz, dass dies auch für jede endliche abelsche Gruppe gilt, wenn wir $\mathbb{Z}/_n^\times$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ betrachten.
(c) Benutzen Sie nun die Aussage $\operatorname{Aut}(\mathbb{Q}[e^{2\pi i/n}]|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/_n^\times$, um zu zeigen, dass sich jede endliche abelsche Gruppe als Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ realisieren lässt.

4. Symmetrische Polynome

4.1. Ein Polynom $s \in K[X_1, \dots, X_n]$ heißt symmetrisch in den Variablen $X_1, \dots, X_n$, wenn $s(X_1, \dots, X_n) = s(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})$ für alle $\pi \in S_n$.

(a) Sei $P(X) = X^n + s_1X^{n-1} + \ldots + s_n = (X+X_1)(X+X_2)\cdots(X+X_n)$. Man nennt s_i das *elementarsymmetrische Polynom* vom Grad i in $X_1,\ldots,X_n$. Man schreibe diese möglichst explizit hin.
(b) Zeigen Sie, dass sich für $n = 2$ jedes symmetrische Polynom $s(X_1,X_2)$ als Polynom in s_1 und s_2 schreiben lässt. Können Sie diese Aussage auf $n > 2$ verallgemeinern?
(c) Zeigen Sie, dass die *Diskriminante* $D_n := \prod_{i<j}(X_i - X_j)^2$ von P in $K[X_1,\ldots,X_n]$ symmetrisch ist und stellen Sie D_2 als Polynom in s_1 und s_2 dar. Welcher Zusammenhang besteht zur Mitternachtsformel?

5. Lösen polynomieller Gleichungen durch Radikale

5.1. Wir wollen hier eine Formel für die Nullstellen einer allgemeinen kubischen Gleichung über $\mathbb{C}$ bestimmen.
(a) Führen Sie zuerst die Gleichung $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ mit $a \neq 0$ durch eine Transformation der Form $x \mapsto z+h$ in $z^3 + pz + q = 0$ über.
(b) Führen Sie die Substitution $z = u+v$ durch und folgern Sie, dass $p = -3uv$ und $q = -(u^3+v^3)$ gilt.
(c) Stellen Sie eine quadratische Gleichung auf, die als Lösungen u^3 und v^3 besitzt und drücken Sie die Koeffizienten durch p und q aus. Wir erhalten

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D} \quad\text{und}\quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{D} \quad\text{mit}\quad D := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

(d) Zeigen Sie, dass $u+v, ju+j^2v, j^2u+jv$ mit $j = e^{2\pi i/3}$ dann alle Lösungen der obigen Gleichung $z^3 + pz + q = 0$ sind, wenn man für u und v zwei dritte Wurzeln wählt, die der Bedingung $p = -3uv$ genügen.
(e) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $x^3 + 3x^2 + 6x + 6 = 0$.

5.2. Sind die folgenden Gleichungen durch Radikale lösbar?
(a) $x^5 - 9x + 3 = 0$
(b) $x^6 + 12x^4 - 9x^2 - 3 = 0$
(c) $x^{11} = 17$

6. Sonstiges

6.1. Sei $E|K$ eine Galoiserweiterung und $a \in E$. Zeigen Sie, dass

$$\text{die Spur } tr(a) := \sum_{\sigma\in\mathrm{Aut}(E|K)} \sigma(a) \quad \text{und die Norm } N(a) := \prod_{\sigma\in\mathrm{Aut}(E|K)} \sigma(a)$$

Elemente aus K sind.

6.2. Ein berühmter Satz von Lindemann besagt, dass für $a \in \mathbb{C}$ algebraisch, die Zahl e^a transzendent ist. Man folgere daraus, dass π transzendent ist.