Übungsblatt 0: Einführung

Dieses Blatt soll in der ersten Übung (Mittwoch 21.04.2010) besprochen werden und orientiert sich an der ersten Vorlesung: "Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal". Die Hilfsmittel hierzu sind elementar und ermöglichen einen motivierenden unmittelbaren Zugang. Wie immer bedeutet elementar *nicht unbedingt* einfach.

1. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Im Folgenden bedeutet "Konstruktion" stets "Konstruktion mit Zirkel und Lineal".

1.1. Gegeben seien Strecken der Länge $1, r, s \in \mathbb{R}$ mit $r, s > 0$.
- (a) Konstruieren Sie Strecken der Länge $r+s$ und $r-s$ (angenommen $r > s$).
- (b) Konstruieren Sie Strecken der Länge $r \cdot s$ und r/s.
- (c) Konstruieren Sie eine Strecke der Länge $\sqrt{r}$.

Lösungshinweise: —
- (a) *Das ist einfach.*
- (b) *Lösung mit Strahlensatz: Konstruiere zuerst die y-Achse. Dann trage man von $(0,0)$ aus eine Strecke der Länge s nach oben ab. Ziehe nun eine Gerade durch die Punkte $(1,0)$ und $(0,s)$ und eine Parallele dazu durch den Punkt $(r,0)$. Diese schneidet die y-Achse im Punkt $(0,rs)$.*
  Möchte man r/s konstruieren, so konstruiere man die Gerade durch $(r,0)$ und $(0,s)$. Die Parallele durch den Punkt $(0,1)$ schneidet die x-Achse im Punkt $(r/s,0)$.
- (c) *1. Möglichkeit (mit dem Höhensatz im Dreieck): Man konstruiere einen Kreis über einer Strecke der Länge $r+1$. Dann eine Senkrechte über dem Punkt, der diese Strecke im Verhältnis $1:r$ teilt. Der Schnittpunkt des Kreises mit dieser Senkrechten ist vom Lotpunkt $\sqrt{r}$ entfernt.*
  2. Möglichkeit (mit dem Satz des Pythagoras): Man betrachte ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse der Länge $\frac{r}{2}+1$ und einer Kathete der Länge $\frac{r}{2}$. Dieses hat eine Kathete der Länge $\sqrt{r+1}$. Diese kann man dann wiederrum zu einer Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks machen, dessen eine Kathete die Länge 1 hat. Daraus ergibt sich dann $\sqrt{r}$.

—

Dies zeigt, wie man gewisse algebraische Operationen geometrisch durchführen kann. Umgekehrt können geometrische Konstruktionen algebraisch beschrieben werden:

1.2. Gesucht sind die Schnittpunkte von
- (a) zwei allgemeinen Geradengleichungen,
- (b) einer Geradengleichung und einer Kreisgleichung,
- (c) zwei allgemeinen Kreisgleichungen.

Erläutern Sie, wie man die Koordinaten der Schnittpunkte durch Lösungen linearer bzw. quadratischer Gleichungen beschreiben kann.

Lösungshinweise: — *Eine Geradengleichung hat die Form $ax+by=c$, eine Kreisgleichung für einen Kreis um (x_0,y_0) mit Radius $r>0$ die Form $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.*
In den ersten beiden Teilaufgaben löst man eine lineare Gleichung nach einer Unbekannten auf und setzt diese in die zweite Gleichung ein. Daraus ergibt sich bereits eine quadratische (oder sogar lineare) Gleichung für die Koordinaten. (Ein wenig Vorsicht ist geboten, wenn die beiden Geraden im ersten Teil parallel sind. Dann gibt es aber auch keinen Schnittpunkt…)
Hat man dagegen zwei Kreisgleichungen gegeben, so kann man die beiden voneinander abziehen und erhält dadurch eine Geradengleichung. Diese kann man nun wiederrum in eine der Kreisgleichungen einsetzen, um die gewünschten quadratischen Gleichungen in einer Variablen zu erhalten.
Das oben beschriebene Vorgehen funktioniert jedoch nicht, wenn zum Beispiel einer der Koeffizienten der

linearen Gleichung 0 *ist. Man kann sich aber überlegen, dass es in diesen Spezialfällen eher noch einfacher ist.* —

Wir identifizieren $\mathbb{R}$ mit der x-Achse $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ vermöge der Abbildung $x \mapsto (x, 0)$. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge reeller Zahlen mit $0, 1 \in M$. Sei $\overline{M} \subset \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte, die sich hieraus mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen. Schließlich sei $K \subset \mathbb{R}$ der kleinste Teilkörper, der M umfasst und zu jedem $c > 0$ auch $\sqrt{c}$ enthält. Anders gesagt, K ist der durch M erzeugte *quadratisch abgeschlossene Teilkörper* von $\mathbb{R}$.

1.3. Zeigen Sie, dass $\overline{M} = K \times K$ gilt.

Lösungshinweise: — *Wir definieren die Projektionen $p_1, p_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf die Achsen mittels $p_1(x,y) = x$ und $p_2(x,y) = y$. Zunächst überzeugt man sich, dass $p_1(\overline{M}) = p_2(\overline{M})$ gilt. Die Inklusion $p_1(\overline{M}) \supset K$ wurde im Wesentlichen in der ersten Aufgabe erledigt. Man muss nur noch zeigen, dass aus $x \in p_1(\overline{M})$ auch $-x \in p_1(\overline{M})$ folgt und dass für eine konstruierte Strecke der Länge r im $\mathbb{R}^2$ wirklich $r \in p_1(\overline{M})$ gilt.*

Die Inklusion $p_1(\overline{M}) \subset K$ folgt aus der zweiten Aufgabe. —

Die Vorlesung hat aus didaktischen Gründen die Verwendung von komplexen Zahlen vermieden. Aus mathematischer Sicht ist die Frage aber durchaus interessant:

1.4. Ist $\overline{M}$, als Teilmenge von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ betrachtet, ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?
Wie lässt sich die Menge $\overline{M} \subset \mathbb{C}$ algebraisch charakterisieren?

Lösungshinweise: — *Zieht man um z_1 einen Kreis mit Radius $|z_2|$ und um z_2 einen Kreis mit Radius $|z_1|$ zieht, so liefert einer der Schnittpunkte den Punkt $z_1 + z_2$. Die Konstruktion von $-z$ aus $z \in \overline{M}$ ist auch einfach. Zur Konstruktion des Produkts erinnere man sich an die Polardarstellung $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$. Man kann die Konstruktion auf die Multiplikation reeller Zahlen und die Addition von Winkeln zurückführen. Dies ist aber nach den Aufgaben 1.1 und 2.3 möglich. Ähnliches gilt auch für die Division.* —

Bemerkung: Der *Satz von Mohr–Mascheroni* (1672/1797) besagt, dass jeder Punkt, der mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, auch alleine mit Zirkel konstruierbar ist. Versuchen Sie doch mal, einige einfache Konstruktionen ohne Lineal durchzuführen!

Bemerkung: Wenn man statt Zirkel und Lineal nur das Lineal zulässt, dann sind manche Konstruktionen nicht mehr möglich. (Warum?) Der *Satz von Steiner* besagt, dass ein Lineal genügt, wenn man einen einzigen Kreis und seinen Mittelpunkt vorgibt. Daraus folgt, dass man alle Konstruktionen mit Zirkel und Lineal auch noch mit einem Lineal und einem rostigen Zirkel (mit festem Radius) ausführen kann.

2. Klassische Konstruktions-Probleme

Versetzen Sie sich nach Delos vor ca. 2443 Jahren. Die Götter fordern einen würfelförmigen Altar, der genau das doppelte Volumen des alten, ebenfalls würfelförmigen Altars haben soll. Dazu müsste man die Zahl $\sqrt[3]{2}$ konstruieren. (Warum?) Zur Konstruktion sakraler Bauten stehen Ihnen seit jeher nur Zirkel und Lineal zur Verfügung.

2.1. (a) Ist $\sqrt[3]{2}$ Lösung einer linearen Gleichung mit rationalen Koeffizienten?
(b) Ist $\sqrt[3]{2}$ Lösung einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten?
(c) Kann man $\sqrt[3]{2}$ mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruieren?

Lösungshinweise: — *Zuerst zeigen wir: Die Zahl $\sqrt[3]{2}$ ist nicht rational.*

Beweis. Angenommen es existiert eine rationale Zahl $r = \frac{a}{b}$ sodass $r^3 = 2$. Hierbei ist $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \geq 1$, und wir können $\operatorname{ggT}(a,b) = 1$ annehmen. Aus $r^3 = 2$ folgt $a^3 = 2b^3$. Demnach muss a gerade sein, $a = 2\bar{a}$. Andererseits folgt aus $2b^3 = a^3 = 8\bar{a}^3$ sofort $b^3 = 4\bar{a}^3$, also muss auch b gerade sein. Dies widerspricht der Annahme $\operatorname{ggT}(a,b) = 1$. Wir schließen daraus, dass eine keine rationale Zahl r mit $r^3 = 2$ geben kann. □

Um also $\sqrt[3]{2}$ mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, kommen wir also allein mit den Körperoperationen nicht aus sondern brauchen mindestens eine Quadratwurzel. Fragen wir uns zunächst, ob eine einzige Wurzel hierzu ausreicht:

Lemma 2.1. *Sei $K_0 \subset K_1$ eine quadratische Erweiterung. Wenn $\sqrt[3]{2} \in K_1$, dann $\sqrt[3]{2} \in K_0$.*

Beweis. Nach Voraussetzung haben wir $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{c}$ mit $a, b, c \in K_0$, $c > 0$, also

$$2 = (a + b\sqrt{c})^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c} = (a^3 + 3ab^2c) + (3a^2 + b^2c)b\sqrt{c}.$$

Der Term $3a^2 + b^2c$ ist nicht-negativ und verschwindet genau dann wenn $a = b = 0$.

- Wenn $b = 0$, dann gilt $\sqrt[3]{2} = a \in K_0$.
- Wenn $b \neq 0$, dann gilt $\sqrt{c} = \frac{2 - a^3 - 3ab^2c}{3a^2b + b^3c} \in K_0$.

In beiden Fällen schließen wir, dass $\sqrt[3]{2} \in K_0$. □

Dieses Argument können wir nun iterieren und erhalten daraus folgendes Ergebnis:

Satz 2.2. *Die Zahl $\sqrt[3]{2}$ kann nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.*

Beweis. Wäre $\sqrt[3]{2}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar ausgehend von der Länge 1, dann gäbe es einen Turm $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_{n-1} \subset K_n \subset \mathbb{R}$ quadratischer Erweiterungen in $\mathbb{R}$ sodass $\sqrt[3]{2} \in K_n$. Das vorhergehende Lemma zeigt, dass $\sqrt[3]{2} \in K_{n-1}$, dann $\sqrt[3]{2} \in K_{n-2}$, ..., und schließlich $\sqrt[3]{2} \in K_0 = \mathbb{Q}$. Dies widerspricht unserer Feststellung, dass $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$. □

—

Zur Geschichte dieses *Delischen Problems* lese man den englischen Wikipedia-Artikel. Wer mutig und versiert ist, möchte vielleicht einen ordentlichen deutschen Wikipedia-Artikel hierzu schreiben und pflegen. Dank und Bewunderung sind ihm/ihr sicher.

2.2. Konstruieren Sie das regelmäßige $3, 4, 5, 6, 8$-Eck mit Zirkel und Lineal.

Lösungshinweise: — *Das einzige Problem liegt beim 5-Eck. Dort muss man die Zahl* $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ *konstruiert werden, was mit den Methoden der Aufgabe 1 gelingt.* —

Ein weiteres klassisches Problem betrifft die Konstruktion von bestimmten Winkeln. Wir haben oben gesehen, dass man Längen addieren, multiplizieren und dividieren kann. Welche Operationen sind mit Winkeln möglich?

2.3. (a) Kann man zu gegebenen Winkeln ϕ und θ einen Winkel $\phi + \theta$ konstruieren?
(b) Kann man einen beliebigen Winkel halbieren?
(c) Können Sie den rechten Winkel $\pi/2$ dreiteilen? Und anschließend $\pi/6$?

Lösungshinweise: —

(a) *Sei der Winkel ϕ durch die Punkte P_1, Q_1 und R_1 gegeben und der Winkel θ durch die Punkte P_2, Q_2 und R_2. Dann trage man auf der Geraden Q_1R_1 von Q_1 aus die Länge der Strecke $\overline{Q_2P_2}$ ab. Darauf errichte man ein zu $P_2Q_2R_2$ ähnliches Dreieck $P_2'Q_2'R_2'$. Der Winkel $\phi + \theta$ ist durch die Punkte P_1, Q_1, R_2' gegeben.*

(b) *Wie in der Schule...*

(c) *Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen* 1 *und* 2*. Der kleinste Winkel ist dann* 30° *groß. Insbesondere kann dieser benutzt werden, um einen gegebenen* 90° *Winkel zu dritteln. Die Frage mit dem* 30° *Winkel wird in der Vorlesung beantwortet: Nein (sonst könnte man auch den 60° Winkel dritteln).*

—

3. Struktur und Symmetrie

In der Algebra geht es um die Untersuchung von Strukturen und Symmetrien. Wir möchten Ihnen hier ein anschauliches und doch nicht-triviales Beispiel geben.

3.1. Welche Gemeinsamkeit fällt Ihnen an den beiden Bildern in Abbildung 1 auf?

ABBILDUNG 1.

Den meisten Menschen fällt zuerst auf, dass die Anzahl der Objekte links und rechts übereinstimmt. Die algebraische Struktur der natürlichen Zahlen ist Ihnen schon seit Ihrer Grundschulzeit geläufig und Sie können damit sicher und schnell umgehen. Allerdings gibt es in unserer Umwelt viel mehr schöne und wichtige Strukturen, als man auf den ersten Blick vermutet. Genau dafür soll diese Aufgabe Sie sensibilisieren.

3.2. Was haben diese beiden Bilder in Abbildung 2 gemeinsam?

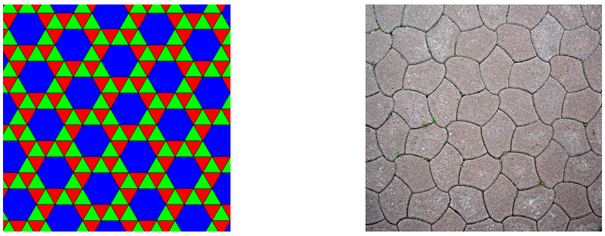

ABBILDUNG 2.

Auf Wikipedia finden Sie die 17 ebenen kristallographischen Gruppen aufgeführt. Welche dieser Gruppen passt zu den obigen Bildern? Zusatzaufgabe: Versuchen Sie möglichst viele verschiedene Gruppen zu finden, die als Symmetriegruppen von Pflasterungen in Stuttgart (oder einer anderen Stadt) auftreten.

Lösungshinweise: — *Da die abgebildeten Strukturen eine dreizählige Drehsymmetrie aufweisen, kommen die ersten* 12 *Gruppen nicht als Symmetriegruppen in Frage. Weiter stellt man fest, dass die Muster keine Spiegelsymmetrien aufweisen, wodurch die Gruppen* $p3m1$, $p31m$ *und* $p6m$ *ausscheiden. Es bleiben also noch* $p3$ *und* $p6$. *Die Muster lassen aber auch keine Drehung um* 180° *zu, so dass nur noch* $p3$ *übrigbleibt.* —