Übungsblatt 0: Einführung

Dieses Blatt soll in der ersten Übung (Mittwoch 21.04.2010) besprochen werden und orientiert sich an der ersten Vorlesung: "Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal". Die Hilfsmittel hierzu sind elementar und ermöglichen einen motivierenden unmittelbaren Zugang. Wie immer bedeutet elementar *nicht unbedingt* einfach.

1. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Im Folgenden bedeutet "Konstruktion" stets "Konstruktion mit Zirkel und Lineal".

1.1. Gegeben seien Strecken der Länge $1, r, s \in \mathbb{R}$ mit $r, s > 0$.
- (a) Konstruieren Sie Strecken der Länge $r+s$ und $r-s$ (angenommen $r > s$).
- (b) Konstruieren Sie Strecken der Länge $r \cdot s$ und r/s.
- (c) Konstruieren Sie eine Strecke der Länge $\sqrt{r}$.

Dies zeigt, wie man gewisse algebraische Operationen geometrisch durchführen kann. Umgekehrt können geometrische Konstruktionen algebraisch beschrieben werden:

1.2. Gesucht sind die Schnittpunkte von
- (a) zwei allgemeinen Geradengleichungen,
- (b) einer Geradengleichung und einer Kreisgleichung,
- (c) zwei allgemeinen Kreisgleichungen.

Erläutern Sie, wie man die Koordinaten der Schnittpunkte durch Lösungen linearer bzw. quadratischer Gleichungen beschreiben kann.

Wir identifizieren $\mathbb{R}$ mit der x-Achse $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ vermöge der Abbildung $x \mapsto (x, 0)$. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge reeller Zahlen mit $0, 1 \in M$. Sei $\overline{M} \subset \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte, die sich hieraus mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen. Schließlich sei $K \subset \mathbb{R}$ der kleinste Teilkörper, der M umfasst und zu jedem $c > 0$ auch $\sqrt{c}$ enthält. Anders gesagt, K ist der durch M erzeugte *quadratisch abgeschlossene Teilkörper* von $\mathbb{R}$.

1.3. Zeigen Sie, dass $\overline{M} = K \times K$ gilt.

Die Vorlesung hat aus didaktischen Gründen die Verwendung von komplexen Zahlen vermieden. Aus mathematischer Sicht ist die Frage aber durchaus interessant:

1.4. Ist $\overline{M}$, als Teilmenge von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ betrachtet, ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?
Wie lässt sich die Menge $\overline{M} \subset \mathbb{C}$ algebraisch charakterisieren?

Bemerkung: Der *Satz von Mohr–Mascheroni* (1672/1797) besagt, dass jeder Punkt, der mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, auch alleine mit Zirkel konstruierbar ist. Versuchen Sie doch mal, einige einfache Konstruktionen ohne Lineal durchzuführen!

Bemerkung: Wenn man statt Zirkel und Lineal nur das Lineal zulässt, dann sind manche Konstruktionen nicht mehr möglich. (Warum?) Der *Satz von Steiner* besagt, dass ein Lineal genügt, wenn man einen einzigen Kreis und seinen Mittelpunkt vorgibt. Daraus folgt, dass man alle Konstruktionen mit Zirkel und Lineal auch noch mit einem Lineal und einem rostigen Zirkel (mit festem Radius) ausführen kann.

2. Klassische Konstruktions-Probleme

Versetzen Sie sich nach Delos vor ca. 2443 Jahren. Die Götter fordern einen würfelförmigen Altar, der genau das doppelte Volumen des alten, ebenfalls würfelförmigen Altars haben soll. Dazu müsste man die Zahl $\sqrt[3]{2}$ konstruieren. (Warum?) Zur Konstruktion sakraler Bauten stehen Ihnen seit jeher nur Zirkel und Lineal zur Verfügung.

2.1. (a) Ist $\sqrt[3]{2}$ Lösung einer linearen Gleichung mit rationalen Koeffizienten?
(b) Ist $\sqrt[3]{2}$ Lösung einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten?
(c) Kann man $\sqrt[3]{2}$ mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruieren?

Zur Geschichte dieses *Delischen Problems* lese man den englischen Wikipedia-Artikel. Wer mutig und versiert ist, möchte vielleicht einen ordentlichen deutschen Wikipedia-Artikel hierzu schreiben und pflegen. Dank und Bewunderung sind ihm/ihr sicher.

2.2. Konstruieren Sie das regelmäßige $3,4,5,6,8$-Eck mit Zirkel und Lineal.

Ein weiteres klassisches Problem betrifft die Konstruktion von bestimmten Winkeln. Wir haben oben gesehen, dass man Längen addieren, multiplizieren und dividieren kann. Welche Operationen sind mit Winkeln möglich?

2.3. (a) Kann man zu gegebenen Winkeln ϕ und θ einen Winkel $\phi+\theta$ konstruieren?
(b) Kann man einen beliebigen Winkel halbieren?
(c) Können Sie den rechten Winkel $\pi/2$ dreiteilen? Und anschließend $\pi/6$?

3. Struktur und Symmetrie

In der Algebra geht es um die Untersuchung von Strukturen und Symmetrien. Wir möchten Ihnen hier ein anschauliches und doch nicht-triviales Beispiel geben.

3.1. Welche Gemeinsamkeit fällt Ihnen an den beiden Bildern in Abbildung 1 auf?

ABBILDUNG 1.

Den meisten Menschen fällt zuerst auf, dass die Anzahl der Objekte links und rechts übereinstimmt. Die algebraische Struktur der natürlichen Zahlen ist Ihnen schon seit Ihrer Grundschulzeit geläufig und Sie können damit sicher und schnell umgehen. Allerdings gibt es in unserer Umwelt viel mehr schöne und wichtige Strukturen, als man auf den ersten Blick vermutet. Genau dafür soll diese Aufgabe Sie sensibilisieren.

3.2. Was haben diese beiden Bilder in Abbildung 2 gemeinsam?

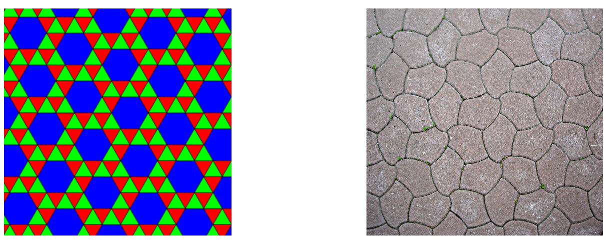

ABBILDUNG 2.

Auf Wikipedia finden Sie die 17 ebenen kristallographischen Gruppen aufgeführt. Welche dieser Gruppen passt zu den obigen Bildern? Zusatzaufgabe: Versuchen Sie möglichst viele verschiedene Gruppen zu finden, die als Symmetriegruppen von Pflasterungen in Stuttgart (oder einer anderen Stadt) auftreten.