Modulprüfung Algebra

Nachklausur

Bitte ausfüllen:

Name, Vorname	Matrikelnummer	Studiengang

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Der offizielle Spickzettel liegt bei.
- **Beschriften** Sie bitte alle Blätter zur Abgabe mit Ihrem Namen!
- Bei den Kästchenaufgaben reicht es, das **Ergebnis** einzutragen.
  Ansonsten ist immer eine **Begründung** verlangt.
- Bei Ja/Nein-Aufgaben gibt es Punkte für richtige Antworten, keine Punkte für leere Kästchen, und **negative Punkte** für falsche Antworten. Die Gesamtpunktzahl der Aufgabe kann allerdings nicht negativ werden.
- **Mobiltelefone** müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. *Irrationalität* (*ca. 2+2 Punkte*)

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{60} \in \mathbb{R}$ irrational ist, also nicht in $\mathbb{Q}$ liegt.

(b) Die Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{60}] = \{\, a + b\sqrt{60} : a, b \in \mathbb{Q} \,\}$ ist ein Teilring von $\mathbb{R}$.
Ist $\mathbb{Q}[\sqrt{60}]$ ein Körper? (Begründen Sie kurz.)

Aufgabe 2. *Gruppen und Operationen* (*ca. 1+2+5+2 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die Elementarteilerform der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen der Ordnung 99 bis auf Isomorphie.

(c) Bestimmen Sie alle Gruppen der Ordnung 99 mit Hilfe der Sylow-Sätze.

(d) Sei G eine Gruppe der Ordnung 99 und X eine Menge mit 13 Elementen.
Hat jede Operation von G auf X einen Fixpunkt? (Begründen Sie kurz.)

Aufgabe 3. *Endliche Körper* (*ca. 1+3+2+2 Punkte*)

(a) Sei $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/_7$ der Körper mit 7 Elementen, gegeben durch die Restklassen $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}$ modulo 7. Welche davon sind Quadrate in $\mathbb{F}_7$?

(b) Bestimmen Sie ein Element $a \in \mathbb{F}_7$, sodass der Quotientenring $\mathbb{F}_7[X]/(X^2 - a)$ ein Körper ist. (Begründen Sie dies kurz.) Wie viele Elemente hat dieser Körper?

(c) Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper der Charakteristik $\neq 2$. Wie viele Quadrate gibt es in $\mathbb{F}$?
Folgern Sie hieraus, dass ein $a \in \mathbb{F}$ existiert, sodass $X^2 - a$ in $\mathbb{F}[X]$ irreduzibel ist.

(d) Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper der Charakteristik 2. Zeigen Sie, dass jedes Polynom $X^2 - a$ in $\mathbb{F}[X]$ reduzibel ist. (*Hinweis:* Frobenius-Automorphismus)

Aufgabe 4. *Körpererweiterungen* (*ca. 8 Punkte*)
Im Folgenden seien K und L Körper, E über K eine Galois-Erweiterung sowie $p, q \in \mathbb{N}$ zwei verschiedene Primzahlen.

	wahr	**falsch**
(a) Ist $K < L$ und L algebraisch über K, dann gilt $\lvert L : K\rvert < \infty$.	☐	☐
(b) Gilt $K < L$ und $\lvert L : K\rvert < \infty$, dann ist L algebraisch über K.	☐	☐
(c) Es gibt einen Winkel, der sich mit Zirkel und Lineal nicht dreiteilen lässt.	☐	☐
(d) Es gibt keinen Winkel, der sich mit Zirkel und Lineal dreiteilen lässt.	☐	☐
(e) Jeder Körperhomomorphismus $K \to L$ ist injektiv.	☐	☐
(f) Es gibt einen nicht-trivialen Körperautomorphismus von $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.	☐	☐
(g) Ist $\lvert E : K\rvert = p^2 q^3$, dann gibt es Zwischenkörper Z mit $\lvert Z : K\rvert = q^3$.	☐	☐
(h) Ist $\lvert E : K\rvert = p^2 q^3$, dann gibt es Zwischenkörper Z mit $\lvert E : Z\rvert = q^3$.	☐	☐

Aufgabe 5. *Zerlegbarkeit in Polynomringen* (*ca. 6 Punkte*)
Sind die folgenden Polynome in den angegebenen Ringen reduzibel oder irreduzibel?
(Bitte tragen Sie „red“ für reduzibel und „irr“ für irreduzibel ein.)

	in $\mathbb{Z}/_2[X]$	in $\mathbb{Z}[X]$	in $\mathbb{R}[X]$	in $\mathbb{C}[X]$
$3X+6$			irr	
X^2+1				red
X^3+X^2+1			red	red
X^6+3X^3+6				

Aufgabe 6. *Ringe, Ideale, Quotienten* (*ca. 5+3 Punkte*)
Sei $\mathbb{Z}[X]$ der Polynomring über $\mathbb{Z}$ und sei $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ der Ring der Gaußschen Zahlen.

(a) Welche der folgenden Isomorphien von Ringen gelten?

	wahr	**falsch**
$\mathbb{Z}[X]/(X) \cong \mathbb{Z}$	☐	☐
$\mathbb{Z}[X]/(X^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐	☐
$\mathbb{Z}[X]/(2) \cong (\mathbb{Z}/2)[X]$	☐	☐
$\mathbb{Z}[X]/(2, X) \cong \mathbb{Z}/2$	☐	☐
$\mathbb{Z}[X]/(2X) \cong (\mathbb{Z}/2)[X] \times \mathbb{Z}$	☐	☐

(b) Skizzieren Sie das von $3+5i$ in $\mathbb{Z}[i]$ erzeugte Ideal $(3+5i)$ in der Gaußschen Zahlenebene.
Der Quotientenring hat die Mächtigkeit $|\mathbb{Z}[i]/(3+5i)| = \boxed{}$.

Aufgabe 7. *Kreisteilungspolynome* (*ca. 2+1+2+2+3+1 Punkte*)

(a) Wie lautet die Zerlegung von $P = X^8 - 1$ in irreduzible Polynome in $\mathbb{Q}[X]$?
$P = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie $\xi \in \mathbb{C}$ mit $P(\xi) = 0$ so, dass $\mathbb{Q}[\xi]$ ein Zerfällungskörper von P über $\mathbb{Q}$ ist.

(c) Ist $\mathbb{Q}[\xi]$ über $\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung? (Begründen Sie kurz.)

(d) Welchen Grad hat die Erweiterung $\mathbb{Q}[\xi]$ über $\mathbb{Q}$?
Welche Ordnung hat die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}[\xi]|\mathbb{Q})$.

(e) Es gibt Automorphismen $\alpha, \beta \colon \mathbb{Q}[\xi] \to \mathbb{Q}[\xi]$ mit $\alpha(\xi) = \xi^3$ und $\beta(\xi) = \xi^5$.
Geben Sie die Multiplikationstafel der Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}[\xi]\,|\,\mathbb{Q})$ an.

(f) Lässt sich das regelmäßige 8-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren?
(Begründen Sie kurz; eines der möglichen Argumente genügt.)