Modulprüfung Algebra

Bitte ausfüllen:

Name, Vorname	Matrikelnummer	Studiengang

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Der offizielle Spickzettel liegt bei.
- Mobiltelefone müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig!
- Bitte beschriften Sie alle Blätter zur Abgabe mit Ihrem Namen!
- Bei den Kästchenaufgaben reicht es, die Ergebnisse einzutragen.
  Ansonsten ist immer eine **Begründung** verlangt.
- Bei der Aufgabe 3 und 5 (b) gibt es für leere Kästchen null Punkte und für falsche Antworten werden **negative Punkte** vergeben.
  Die Gesamtpunktzahl der Aufgabe kann allerdings nicht negativ werden.
- Ergebnisse der Klausur gibt es voraussichtlich ab Anfang Oktober.
  Die Klausureinsicht findet am 18.10.2010 von 14:00 bis 15:30 im Raum 8.141 statt.

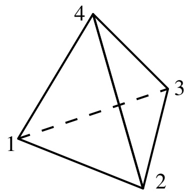
Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*ca. 2+2 Punkte*)

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.

(b) Die Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{ \, a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q} \, \}$ ist ein Teilring von $\mathbb{R}$.
Ist $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ein Körper? Begründen Sie kurz.

Aufgabe 2 (*ca. 1+2+2+4+1 Punkte*) Symmetriegruppen



Sei T ein regelmäßiges Tetrader im $\mathbb{R}^3$ wie rechts skizziert und $G < \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien (Drehungen) von T.

(a) Die Gruppe hat Ordnung $|G| = \boxed{\quad}$. *Hinweis:* Bahnengleichung.

(b) Die Operation von G auf den Ecken ergibt eine Einbettung $G \to S_4$.
Geben Sie die Elemente der Bildgruppe $H < S_4$ in Zykelschreibweise an.

(c) Die Gruppe H zerfällt in vier Konjugationsklassen mit $1, 4, 4$ und 3 Elementen.
Zählen Sie jede Konjugationsklasse durch Angabe ihrer Elemente auf.

(d) Geben Sie jeweils eine Untergruppe von H der Ordnung $2, 3, 4, 5, 6$ ohne Beweis an oder begründen Sie, warum eine solche Untergruppe nicht existieren kann.
Hinweis: Jede Untergruppe vom Index 2 ist normal.

(e) Welche der von Ihnen angegebenen Untergruppen sind Sylow-Gruppen von H?

Aufgabe 3 (*ca. 6 Punkte*) Zerlegbarkeit in Polynomringen

Sind die folgenden Polynome in den angegebenen Ringen irreduzibel?
(Bitte tragen Sie "red" für reduzibel und "irr" für irreduzibel ein.)

	in $\mathbb{Z}/_2[X]$	in $\mathbb{Z}[X]$	in $\mathbb{R}[X]$	in $\mathbb{C}[X]$
$3X + 3$			irr	
$X^2 + 2X + 5$				red
$X^3 + 9X^2 - 5$			red	red
$X^5 + 6X^3 - 6X^2 + 3$				

Aufgabe 4 (*ca. 2+2+5 Punkte*) Gruppen

(a) Bestimmen Sie die Elementarteilerform der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 6 & -6 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Man bestimme alle abelschen Gruppen der Ordnung $2009 = 41 \cdot 49$ bis auf Isomorphie.

(c) Man bestimme alle Gruppen der Ordnung 2009. (Mit Hilfe der Sylow-Sätze.)

Aufgabe 5 (*ca. 1+4+4 Punkte*) Ringe, Ideale, Quotienten
In $\mathbb{Z}[i]$ gilt $i^2 = -1$ und $(1+i)\cdot(3-i) + (-i)\cdot(2-3i) = 1$.

(a) In $\mathbb{Z}[i]$ gilt $\operatorname{ggT}(1+i, 2-3i) = \boxed{}$.

(b) Welche der folgenden Isomorphien gelten?

	wahr	**falsch**
$\mathbb{Z}[i]/(i) \cong \mathbb{Z}$	☐	☐
$\mathbb{Z}[i]/((1+i)\cap(2-3i)) \cong \mathbb{Z}[i]/(1+i) \times \mathbb{Z}[i]/(2-3i)$	☐	☐
$\mathbb{Z}[i]/(5-i) \cong \mathbb{Z}[i]/(1+i) \times \mathbb{Z}[i]/(2-3i)$	☐	☐
$\mathbb{Z}[i]/(1-i) \cong \mathbb{Z}[i]/(1+i)$	☐	☐

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in den folgenden Quotientenringen.

$|\mathbb{Z}[i]/(1+i)| = \boxed{}$, $\quad |\mathbb{Z}[i]/(2-3i)| = \boxed{}$

Aufgabe 6 (*ca. 2+1+1 Punkte*) Endliche Körper

(a) Ist das Polynom $P = X^3 - X + 2$ irreduzibel in $\mathbb{F}_5[X]$?

(b) Konstruieren Sie möglichst explizit einen Körper K mit 125 Elementen.

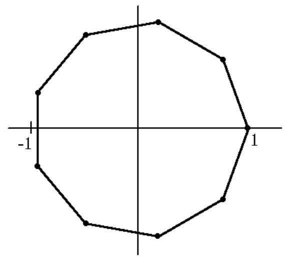
(c) Sei L ein Körper mit 625 Elementen. Wie viele Unterkörper hat L?

Aufgabe 7 (*ca. 2+1+2+2+3+1 Punkte*) Kreisteilungspolynome

(a) Wie lautet die Zerlegung von $P = X^9 - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ in irreduzible Polynome?

$P = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie $\xi \in \mathbb{C}$ so, dass $\mathbb{Q}[\xi]$ ein Zerfällungskörper von P über $\mathbb{Q}$ ist.



(c) Ist $\mathbb{Q}[\xi] : \mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung?

(d) Welchen Grad hat die Erweiterung $\mathbb{Q}[\xi]$ über $\mathbb{Q}$?
Bestimmen Sie die Ordnung der Gruppe $\operatorname{Aut}(\mathbb{Q}[\xi]\,|\,\mathbb{Q})$.

(e) Wir betrachten den Automorphismus $\alpha : \mathbb{Q}[\xi] \to \mathbb{Q}[\xi]$ mit $\alpha(\xi) = \xi^2$. Bestimmen Sie die Ordnung von α.

(f) Warum lässt sich das regelmäßige 9-Eck nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren?