Mathématiques assistées par ordinateur

Examen final du 25 mai 2009, de 13h à 16h, durée 3h.

Sont autorisés les documents du cours ainsi que la calculatrice ou Xcas sur PC.
Ce sujet comporte 5 pages. Les paragraphes sont indépendants.
Justifiez vos réponses — brièvement mais suffisamment.

1. Racines d'un polynôme

1.1. On considère le polynôme $P = X^5 - 17X + 2$

(a) Combien admet-il de racines rationnelles, c'est-à-dire dans $\mathbb{Q}$?

(b) Combien admet-il de racines complexes, c'est-à-dire dans $\mathbb{C}$?

(c) Combien admet-il de racines réelles, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}$?

Vous pouvez, bien sûr, vous inspirer d'une graphique ou d'un calcul approché. Pour une justification rigoureuse, par contre, il faudra des arguments exacts. (Il existe – entre autre – des réponses simples, vérifiables sans ordinateur.)

Correction: *Cet exercice est très ouvert et peut se résoudre de différentes manières indépendantes. Néanmoins, l'enchaînement des arguments et la précision de la formulation sont importants. À noter en particulier que* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

(a) ► *On trouve facilement que* $P(2) = 0$, *donc* P *admet* ***au moins*** *une racine rationnelle. Il reste à déterminer s'il y en a d'autres.*

► *Si* $x = p/q$ *est racine de* $P = X^5 - 17X + 2$, *où* $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$ *et* $q \geq 1$, *alors* $p \mid 2$ *et* $q \mid 1$. *Ceci ne laisse que les quatre candidats* $x = \pm 1, \pm 2$. *On les teste un par un :* $P(-2) = 4$, $P(-1) = 18$, $P(1) = 14$, $P(2) = 0$. *Ainsi on conclut que* $x = 2$ *est la seule racine rationnelle de* P.

▷ *Dans Xcas la commande* `rationalroot(X^5-17X+2)` *fait exactment ce travail et renvoie la liste complète des racines rationnelles. C'est un calcul exact, que l'on peut déléguer sans crainte ; néanmoins la réponse devient plus transparente si l'on l'explicite comme ci-dessus.*

(b) ► *Ici aucun calcul n'est nécessaire pour trouver la réponse ! Le théorème fondamental de l'algèbre, alias Gauss–d'Alembert, dit que tout polynôme* $P \in \mathbb{C}[X]$ *de degré* n *admet exactement* n *racines dans* $\mathbb{C}$. *Le polynôme* P, *étant de degré* 5, *admet donc* 5 *racines complexes.*

(c) ► *Une graphique suggère que* P *admet* ***au moins*** 3 *racines réelles.*

Plus précisément, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une racine dans $[-3,-2]$ *car* $P(-3) = -190$ *et* $P(-2) = 4$, *puis une racine dans* $[0,1]$ *car* $P(0) = 2$ *et* $P(1) = -14$, *et enfin la racine rationnelle* 2 *déjà exhibée ci-dessus.*

Il est plus delicat de montrer qu'il n'y a pas plus que 3 *racines réelles : la graphique le suggère, mais ce n'est pas une preuve. (La graphique ne montre qu'un certain intervalle, en plus elle peut cacher des détails très petits, par exemple des racines très proches sont confondues.)*

▶ *Pour compter le nombre des racines réelles, on peut utiliser le théorème de Sturm sur un intervalle assez grand, disons* $[-18,+18]$ *par la borne de Cauchy, ou directement sur* $]-\infty,+\infty[$ *si l'on sait faire. Plus simplement, dans Xcas la commande* `sturmab(x^5-17x+2,-infinity,+infinity)` *donne immédiatement la bonne réponse : P admet exactement* 3 *racines réelles. C'est un calcul exact, que l'on peut déléguer sans crainte.*

▷ *On peut aussi trouver la réponse sans aucun calcul, car le critère de Descartes suffit ici : les coefficients de* $P(X) = X^5 - 17X + 2$ *présentent deux changements de signes, donc il existe au plus deux racines réelles positives ; les coefficients de* $P(-X) = -X^5 + 17X + 2$ *présentent un changement de signes, donc il existe au plus une racine réelle négative. Au total il existe donc au plus* 3 *racines réelles, et l'on a déjà vu qu'il en existe au moins* 3*. On conclut que P admet exactement* 3 *racines réelles.*

▷ *Comme alternative on pourrait contempler la dérivée* $P' = 5X^4 - 17$*. Elle n'a que deux racines réelles, à savoir* $\alpha = -\sqrt[4]{17/5}$ *et* $\beta = +\sqrt[4]{17/5}$*. (Les deux racines imaginaires* $\pm i\sqrt[4]{17/5}$ *ne jouent pas de rôle ici.) Par conséquent P est croissante sur* $[-\infty,\alpha]$*, décroissante sur* $[\alpha,\beta]$*, croissante sur* $[\beta,+\infty]$*. Ceci implique que P admet au plus* 3 *racines réelles, en fait exactement trois racines réelles, comme nous l'avons vu plus haut.*

2. Séries entières

On considère la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2.1. Supposons que pour $x \in [0,1]$ nous disposons d'une approximation de e^x à une précision de 10^{-10} près, c'est-à-dire, de 10 décimales significatives.

(a) Discuter brièvement la précision de la formule donnée ci-dessus pour f : en quoi pose-t-elle des problèmes numériques ?

(b) Concrètement, pour $x = 10^{-6}$ calculez e^x à l'aide de votre calculatrice ou de Xcas, et notez le résultat à 10 décimales. En déduire à la main une approximation de $f(x)$. Combien de décimales sont significatives ?

Correction: (a) ▶ *Pour x proche de* 0 *nous avons* $e^x \approx 1$*. Ainsi la différence* $e^x - 1$ *provoquera l'annulation des premières décimales. Si la valeur* e^x *est approchée à* 10 *décimales significatives près, le résultat du calcul approché comportera moins de* 10 *décimales significatives.*

(b) ▶ *Pour* $x = 10^{-6}$ *on trouve l'approximation* $e^x \approx 1.0000010000[005\ldots]$*, donc* $e^x - 1 \approx 0.0000010000$*, puis* $(e^x-1)/x \approx 1.0000$*. À cause de l'annulation des* 6 *premières décimales, on n'obtient au final que* 4 *décimales significatives. Autrement dit, par ce calcul on approche* $f(10^{-6})$ *par* 1.0000 *à une marge d'erreur de* 10^{-4} *près.*

2.2. (a) En partant de la série de e^x en 0, déduire la série $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ en explicitant les coefficients $a_k \in \mathbb{R}$.

Pour tout rang $n \in \mathbb{N}$ on peut donc approcher $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ par la somme finie $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec reste $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$.

(b) Trouver le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|r_n(x)| \leq 10^{-10}$ pour tout $x \in [0,1]$.

(c) Pour $x = 10^{-6}$ calculer ainsi une approximation de $f(x)$ à 10^{-10} près.

Correction: (a) *On a* $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, *donc* $e^x - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, *d'où finalement* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$.

(b) *Pour* $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k$ *on trouve que* $\frac{1}{(n+2)!} x^{n+1} \leq r_n(x) \leq \frac{2}{(n+2)!} x^{n+1}$. *Le plus grande erreur se produit pour* $x = 1$. *Par tâtonnement on trouve* $\frac{2}{13!} \approx 3 \cdot 10^{-10}$ *puis* $\frac{2}{14!} \approx 2 \cdot 10^{-11}$. *Donc* $n = 12$ *convient.*

(c) *Pour* $s_{12}(x) = \sum_{k=0}^{12} \frac{x^k}{(k+1)!}$ *on trouve* $s_{12}(10^{-6}) = 1.0000005000[0016\ldots]$. *Ceci raffine la première approximation* $f(10^{-6}) \approx 1.0000$. *(Puisque x est très petit, seuls les deux premiers termes de la série contribuent vraiment au résultat. Soulignons par contre que le polynôme* s_{12} *assure la bonne approxiation uniformément sur tout l'intervalle* $[0,1]$.*)*

3. Racines de polynômes caractéristiques

On s'intéresse aux valeurs propres des matrices $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 1 & a_2 & 1 \\ 0 & 1 & a_3 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Remarque. Ce sont des matrices *tridiagonales* : les coefficients sur la diagonale de A_n sont $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, alors que sur les codiagonales (au dessus en en dessous de la diagonale) les coefficients sont égaux à 1. Les autres coefficients sont nuls.

Notation. Soit I_n la matrice identité de taille $n \times n$ et soit $P_n := \det(A_n - XI_n) \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme caractéristique de A_n. Par convention on pose $P_0 := 1$ pour la matrice vide.

Remarque. Si vous utilisez la commande `charpoly`, notez qu'en Xcas le polynôme caractéristique de A_n est défini par $\det(XI_n - A_n)$ au lieu de $\det(A_n - XI_n)$. Cette convention change le signe : $\det(XI_n - A_n) = (-1)^n \det(A_n - XI_n)$.

Pour simplifier nous supposons d'abord que $a_k = 0$ pour tout k.

3.1. (a) On voit que $P_1 = -X$, puis on trouve $P_2 = X^2 - 1$. Expliciter les polynômes P_3, P_4, P_5 sous forme développée, puis tracer $P_1, \dots, P_5$. Qu'observez-vous concernant les racines de P_k ?

(b) En développant le déterminant par rapport à la dernière ligne ou colonne, établir une formule de récurrence de la forme $P_{k+1} = S_{k+1}P_k + T_{k+1}P_{k-1}$ avec des polynômes S_{k+1}, T_{k+1} que l'on déterminera.

(c) Établir une conjecture sur les valeurs de $P_k(-2)$ et $P_k(+2)$ en les calculant pour quelques valeurs de k, puis prouver cette conjecture.

(d) En fonction de $k \in \mathbb{N}$ déterminer le nombre des racines de P_k dans l'intervalle $[-2, +2]$. Y a-t-il des racines multiples ?

Correction: (a) *On trouve $P_3 = -X^3 + 2X$ et $P_4 = X^4 - 3X^2 + 1$ puis $P_5 = -X^5 + 4X^3 - 3X$. Sur les graphiques on voit que P_k admet k racines réelles, toutes dans l'intervalle $[-2, +2]$. (D'ailleurs, celles de P_k sont intercalées avec celles de P_{k-1}.)*

(b) *On trouve la formule de récurrence $P_{k+1} = -XP_k - P_{k-1}$ pour tout k. Ceci montre que $P_0, P_1, \dots, P_n$ est une suite de Sturm.*

(c) *On calcule $P_0(-2) = 1$, $P_1(-2) = 2$, $P_2(-2) = 3$, $P_3(-2) = 4$, … et on conjecture que $P_k(-2) = k+1$. Par récurrence, si $P_{k-1}(-2) = k$ et $P_k(-2) = k+1$, alors $P_{k+1}(-2) = 2P_k(-2) - P_{k-1} = 2(k+1) - k = k+2$. De même on trouve $P_0(2) = 1$, $P_1(2) = -2$, $P_2(2) = 3$, $P_3(2) = -4$, etc. On conjecture puis prouve que $P_k(-2) = (-1)^k(k+1)$ de la même manière. Comme alternative, on pourra aussi prouver que $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.*

(d) *La formule de récurrence montre que la suite $P_k, P_{k-1}, \dots, P_0 = 1$ est une suite de Sturm. Ceci permet de calculer l'indice de Cauchy*

$$\mathrm{Ind}_a^b\left(\frac{P_{k-1}}{P_k}\right) = V_a^b(P_k, P_{k-1}, \dots, P_0).$$

Pour $a = -2$ et $b = 2$ on obtient $V_a = 0$ et $V_b = k$, donc $V_a^b = -k$. La fraction $\frac{P_{k-1}}{P_k}$ a donc (au moins) k pôles dans $[-2, 2]$. Puisque le polynôme P_k est de degré k, on conclut que toutes ses racines sont réelles, simples, incluses dans $]-2, 2[$.

3.2. (a) Montrer qu'entre deux racines réelles d'un polynôme réel $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe (au moins) une racine réelle du polynôme dérivé P'.

(b) Soit P un polynôme de degré n dont toutes les racines sont réelles distinctes, et notons-les par $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Déterminer le nombre de racines réelles de P' et de P'' et les localiser par rapport aux racines de P.

Correction: (a) *Par le théorème des accroissements finis, pour tout $a < b$ dans $\mathbb{R}$ il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $P(b) - P(a) = P'(\xi)(b-a)$. Si $P(a) = P(b) = 0$, alors $P'(\xi) = 0$.*

(b) *Le polynôme dérivé est de degré $n-1$ et admet une racine dans chacune des $n-1$ intervalles $x_1 < x_2 < \dots < x_n$: il existe $y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels* *que $P'(y_k) = 0$ et $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < x_n$. En particulier les racines sont distinctes et incluses dans $[x_1, x_n]$. De même, P'' admet $n-2$ racines réelles, distinctes, incluses dans $[x_1, x_n]$.*

3.3. Pour un rang $k \geq 2$ fixé on considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = P_k(x)$. On se propose d'approcher la plus petite racine r de f par la méthode de Newton. (Vous pouvez étudier le cas $k = 4$ si le cas général ne vous réussit pas.)

(a) Sur $[-\infty, r]$ la fonction f est-elle croissante ou décroissante ?
Sur $[-\infty, r]$ la fonction f est-elle concave ou convexe ? Justifier.

(b) Le point initial $u_0 = -2$ garantit-il la convergence monotone de l'itération de Newton $u_{k+1} = u_k - \frac{f(u_k)}{f'(u_k)}$ vers la plus petite racine r de f ?

(c) Pour $f = P_4$ et $u_0 = -2$ expliciter u_1, u_2, u_3 en appliquant trois itérations de Newton.

Correction: (a) *On a déjà vu que P_k a toutes ses racines dans $]-2, +2[$ et que $P_k(-2) = k+1$ est positif pour tout k. D'après ce qui précède, les dérivées P_k' et P_k'' ont toutes leur racines dans l'intervalle $]r, -r[$. Ils sont donc de signe constant sur $[-\infty, r]$. Le terme dominant de P_k est $(-X)^k$, celui de P_k' est $-k(-X)^{k-1}$, celui de P_k'' est $k(k-1)(-X)^{k-2}$. On conclut que $P_k' < 0$ et $P_k'' > 0$ sur $[-\infty, r]$.*

(b) *Sur $[-\infty, r[$ le polynôme P_k est positif, décroissant et convexe. La méthode de Newton à partir du point initial $u_0 = -2$ converge donc, de manière croissante, vers la plus petite racine r de f.*

(c) *Partant de $u_0 = -2.0$ l'itération de Newton donne $u_1 = -1.75$ et $u_2 \approx -1.641$ et $u_3 \approx -1.618$.*

3.4. *Question bonus.* Regardons le cas général où $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
On pose $u := \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} - 2$ et $v := \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} + 2$

(a) Établir une récurrence $P_{k+1} = S_{k+1} P_k + T_{k+1} P_{k-1}$ dans le cas général.

(b) A-t-on $P_0(u) \leq P_1(u) \leq P_2(u) \leq \ldots$?
A-t-on un résultat analogue pour $(-1)^k P_k(v)$?
Si oui donner une preuve, si non donner un contre-exemple.

(c) Déterminer le nombre des racines de P_k dans l'intervalle $[u, v]$.

(d) Comment approcher la plus petite racine de P_k par la méthode de Newton ?