Mathématiques assistées par ordinateur

Examen du 21 mai 2008, de 13h à 16h, durée 3h.

Documents du cours et calculatrices autorisés.
Justifiez vos réponses — brièvement mais suffisamment.
Ce sujet comporte deux pages. Les trois paragraphes sont indépendants.

1. Calcul exact et calcul approché

Comparer, en calcul exact puis en calcul approché, les valeurs des expressions

$$\sqrt{10^{11}+1}-\sqrt{10^{11}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{10^{11}+1}+\sqrt{10^{11}}}.$$

En calcul approché, laquelle des deux valeurs calculées vous paraît-elle plus proche de la valeur exacte ? Justifier rapidement.

2. Séries entières et intégration numérique

On considère la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-\sin(x)}{x^3} & \text{pour } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{6} & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

On cherche à approcher l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$.

2.1. Développer f en une série entière $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$ en explicitant $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2.2. Expliciter une primitive F sous forme d'une série entière $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1}$.

2.3. Majorer l'écart entre l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$ et la somme $s_m = \sum_{k=0}^{m} b_k$

2.4. Déterminer le plus petit rang m tel que s_m approche I à 10^{-10} près.

2.5. Calculer ainsi une valeur approchée de I à 10^{-10} près.

On souhaite comparer cette approche avec la méthode d'intégration de Simpson.

2.6. Expliciter la dérivée 4ème $f^{(4)}$ sous forme d'une série entière.

2.7. En déduire un encadrement $0 \leq f^{(4)} \leq M$ en explicitant $M = \max_{[0,1]} f^{(4)}$. (Le résultat se lit facilement sur la série, ce que l'on justifiera.)

2.8. Déterminer le plus petit n tel que la méthode de Simpson à n subdivisions approche $I = \int_0^1 f(x)dx$ à 10^{-10} près. (Précisons qu'avec n subdivisions cette méthode évalue f en $2n+1$ points équirépartis. Pour vous dépanner vous pouvez admettre l'encadrement $0 \leq f^{(4)} \leq 0.01$ mais ce n'est pas la valeur optimale.)

2.9. Essayons finalement d'approcher I à 10^{-20} près. Déterminer les rangs m et n pour les deux méthodes, comme ci-dessus. Quelle méthode est préférable ?

3. RACINES DE POLYNÔMES

Les *polynômes de Tchebychev* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des polynômes $P_n \in \mathbb{R}[X]$ commençant par $P_0 = 1$ et $P_1 = X$ puis définis, pour $n \geq 1$, par la récurrence $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$.

3.1. Expliciter P_2, P_3, P_4. Tracer l'allure des courbes représentatives de P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 sur l'intervalle $[-1,+1]$. En déduire, pour chacun de ces polynômes, le nombre des racines dans $[-1,+1]$.

3.2. Par récurrence, déterminer le degré, le coefficient dominant, et la parité de P_n.
Rappel : P est appelé *pair* si $P(-X) = P(X)$ et *impair* si $P(-X) = -P(X)$.

3.3. Calculer $P_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis $P_n(-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.4. Pour $n \in \mathbb{N}$ déterminer le nombre des racines de P_n dans l'intervalle $[-1,+1]$.
Justifiez votre démarche : Quel résultat du cours utilisez-vous ?
Vérifiez ses hypothèses, puis détaillez son application.

Pour un rang $n \geq 2$ fixé on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = P_n(x)$. On se propose d'approcher la plus grande racine r de f par la méthode de Newton.

3.5. Sur $[r, +\infty[$ la fonction f est-elle croissante ou décroissante ?
Sur $[r, +\infty[$ la fonction f est-elle concave ou convexe ?

3.6. Le point initial $u_0 = 1$ garantit-il la convergence de l'itération de Newton, c'est-à-dire de la suite itérative définie par $u_{k+1} = u_k - \frac{f(u_k)}{f'(u_k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, vers la plus grande racine r de f ?

3.7. Pour $f = P_4$ et $u_0 = 1$ expliciter u_3 en appliquant trois itérations de Newton.

3.8. Majorer l'écart entre la valeur calculée u_3 et la racine cherchée r.