

Mathématiques assistées par ordinateur

Chapitre 5 : Développement de Taylor et séries entières

Michael Eisermann

Mat249, DLST L2S4, Année 2008-2009

www-fourier.ujf-grenoble.fr/eiserm/cours #no

Document mis à jour le 6 juillet 2009



Sommaire

- 1 Développement de Taylor
 - Développement de Taylor, reste de Lagrange
 - Application à l'exponentielle, sinus et cosinus
 - Implémentation de l'exponentielle
- 2 Séries formelles et séries entières
 - Séries formelles, opérations formelles
 - Séries entières, rayon de convergence
 - Séries de Taylor, fonctions analytiques
- 3 Implémentation de fonctions usuelles
 - Fonctions usuelles développées en séries
 - Exemple : implémentation de $\ln(x)$
 - Exemple : fonctions de Bessel

Objectif : des polynômes aux séries

Rappel : avec les quatre opérations arithmétiques $+$, $-$, $*$, $/$ on peut construire des polynômes et des fractions rationnelles.

Prochaine étape : construire des fonctions plus générales comme

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Problème : quel sens donner aux trois petits points « ... » ?

Comment rendre ces formules rigoureuses ? Deux possibilités :

- 1 Développement fini : polynôme de Taylor $\sum_{k=0}^n a_k x^k + \text{erreur !}$
- 2 Développement infini : série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \text{convergence !}$

Les deux approches sont très importantes dans les applications.

Développement de Taylor

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $x_0 \in I$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable.

Ses dérivées seront notées $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.

Définition

Le **développement de Taylor** de f à l'ordre n en x_0 est le polynôme

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Ainsi les dérivées de f en T_n coïncident en x_0 jusqu'à l'ordre n .

⚠ En général les fonctions f et T_n sont très différentes !
(On a $f = T_n$ si et seulement si f est un polynôme de degré $\leq n$.)
On peut néanmoins espérer que T_n approche f autour de x_0 .

Notation

Le terme d'erreur sera noté $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$.

Autrement dit, on a $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$.

Il faut maintenant contrôler le reste $R_n(x)$.

Le théorème de Taylor–Lagrange

Théorème (contrôle du terme d'erreur)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n + 1$ fois dérivable sur un intervalle I .
Alors pour tout $x_0, x \in I$ il existe $\xi \in \langle x_0, x \rangle$ tel que

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{\text{polynôme de Taylor } T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{\text{terme d'erreur } R_n(x)}$$

Ici on utilise la notation $\langle a, b \rangle = \{(1-t)a + tb \mid 0 < t < 1\}$.
Ainsi $\xi \in \langle x_0, x \rangle$ veut dire que « ξ est situé entre x_0 et x ».

Remarque (TAF)

Pour $n = 0$ nous avons le théorème des accroissements finis :

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \quad \text{pour un } \xi \in \langle x_0, x \rangle.$$

Le théorème de Taylor–Lagrange en est une généralisation.

§1.1

§1.1

Démonstration du théorème de Taylor–Lagrange

On fixe $x \in I$ et on définit $M \in \mathbb{R}$ par $f(x) = T_n(x) + M(x - x_0)^{n+1}$.

Nous voulons montrer que $M = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ pour un $\xi \in \langle x_0, x \rangle$.

Pour $t \in \langle x_0, x \rangle$ nous définissons

$$g(t) = f(t) - T_n(t) - M(t - x_0)^{n+1}.$$

En dérivant $n + 1$ fois nous obtenons

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!M.$$

Il suffit donc de prouver que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ pour un $\xi \in \langle x_0, x \rangle$.

Par construction $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ pour $k = 0, \dots, n$, donc

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

D'abord $g(x_0) = g(x) = 0$, d'où $g'(\xi_1) = 0$ pour un $\xi_1 \in \langle x_0, x \rangle$.

Ensuite $g'(x_0) = g'(\xi_1) = 0$, d'où $g'(\xi_2) = 0$ pour un $\xi_2 \in \langle x_0, \xi_1 \rangle$.

Enfin $g^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(\xi_n) = 0$, d'où $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ pour un $\xi \in \langle x_0, \xi_n \rangle$.

§1.1

Application à l'exponentielle

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ une fonction vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Alors $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous avons $f \in C^\infty$ et $f^{(k)}(0) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé et tout $n \in \mathbb{N}$ on pose donc $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

D'après le théorème de Taylor–Lagrange il existe $\xi_n \in \langle 0, x \rangle$ tel que

$$f(x) = s_n + f(\xi_n) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour $x \geq 0$ on a $1 \leq f(\xi_n) \leq f(x)$ car f est croissante. Ainsi

$$|f(x) - s_n| \leq f(x) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0.$$

Pour $x \leq 0$ on a $f(x) \leq f(\xi_n) \leq 1$ et ainsi

$$|f(x) - s_n| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0.$$

Dans les deux cas on conclut que $s_n \rightarrow f(x)$. □

§1.2

§1.2

Application à sinus et cosinus

Théorème

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, +1]$ deux fonctions vérifiant $f' = g$ et $g' = -f$
ainsi que $f(0) = 0$ et $g(0) = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos(x).$$

Démonstration. Nous avons $f, g \in C^\infty$ et $f^{(k)}(0) = 0, 1, 0, -1, \dots$
ainsi que $g^{(k)} = 1, 0, -1, 0, \dots$ de période 4 pour $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé et tout $n \in \mathbb{N}$ on pose donc

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

D'après le théorème de Taylor–Lagrange il existe $\xi_n \in \langle 0, x \rangle$ tel que

$$f(x) = s_n + (-1)^{n+1} f(\xi_n) \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Notre hypothèse $|f| \leq 1$ assure que

$$|f(x) - s_n| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \rightarrow 0.$$

Pour g l'argument est analogue. □

§1.2

Implémentation de l'exponentielle

Objectif : approcher $f(x) = \exp(x)$ à $\varepsilon = 10^{-20}$ près où $x \in [0, 1]$.

Approximation : on développe f en $x_0 = 0$ à l'ordre n .

On a $f^{(k)} = \exp$, donc $T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

Majoration de l'erreur : $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$, $\xi \in (x, x_0)$.

$$|R_n(x)| = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{3}{(n+1)!} \stackrel{!}{\leq} \varepsilon = 10^{-20}$$

Pour cette majoration on utilise $x \in [0, 1]$ et que \exp est croissante. On trouve n par tâtonnement : ici $n = 21$ convient.

Implémentation : Pour évaluer le polynôme T_n on utilisera Horner !

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = ((\dots((\left(\frac{x}{n-1} + 1\right) \frac{x}{n-2} + 1) \dots) \frac{x}{2} + 1) \frac{x}{1} + 1$$

1/3

9/36

Implémentation de l'exponentielle (suite)

Objectif : approcher $\exp(x)$ où $x \in [-1000000, +1000000]$ à une erreur relative de $\varepsilon = 10^{-14}$ près.

Idée naïve : On applique directement le développement de Taylor.

Pour $R_n(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ on exige que $|R_n(x)/\exp(x)| \leq \varepsilon$.

Mais pour $x = 1000000$ on obtient $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \varepsilon$ seulement pour $n \gg 1000000$. Cette approche est donc hors de question !

Réduction de l'argument : On se ramène à l'intervalle $[0, 1]$. Pour ce faire on utilise nos connaissances de la fonction \exp .

- Pour $x < 0$ on applique la formule $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$.
- Pour $x \in [0, 1]$ le calcul de $\exp(x)$ est facile. On vient de l'implémenter à une erreur relative de 10^{-20} près.

- Pour $x \in]1, 2]$ on a $x = 2x_0$ où $x_0 \in]\frac{1}{2}, 1]$, puis on calcule $\exp(x) = \exp(2x_0) = \exp(x_0)^2$.
- Tout $x \in]1, 1000000]$ s'écrit comme $x = x_0 \cdot 2^k$ où $x_0 \in]\frac{1}{2}, 1]$ et $k \in \{1, \dots, 20\}$. Ainsi $\exp(x) = \exp(x_0 \cdot 2^k) = \exp(x_0)^{2^k}$.

Ce calcul revient à élever k fois au carré. Chaque fois l'erreur relative est multipliée par 2, donc tout au plus par $2^{20} = 1048576 \approx 10^6$.

10/36

Objectif : des polynômes aux séries

Un polynôme $P \in \mathbb{C}[Z]$ est une expression formelle $P = \sum_{k=0}^n c_k Z^k$. Il est déterminé par la suite finie $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ de ses coefficients. Ceci permet d'effectuer toutes les opérations algébriques usuelles.

⚠ À tout polynôme $P \in \mathbb{C}[Z]$ on associe la fonction polynomiale correspondante $f_P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$. Par abus de langage on identifie souvent le polynôme P et la fonction f_P .

Une série formelle $P \in \mathbb{C}[[Z]]$ est une expression $P = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Z^k$. Elle est déterminée par la suite infinie $c_0, c_1, \dots \in \mathbb{C}$ des coefficients. Ceci permet d'effectuer toutes les opérations algébriques usuelles.

⚠ À une telle série formelle $P \in \mathbb{C}[[Z]]$ on veut associer la fonction correspondante f_P définie par la série entière $f_P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Or, $f_P(z)$ n'est définie que si cette série dans \mathbb{C} converge !

A priori il faut donc bien distinguer la série formelle $P = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Z^k$ et la série entière $f_P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Dans la suite nous étudierons le domaine de convergence de f_P puis ses propriétés.

1/30

11/36

Révision : rappels d'analyse

Supposons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ infiniment dérivable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x).$$

Si $R_n(x) \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ converge vers

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Pour cela il faut donner un sens rigoureux à des notions comme

limite d'une suite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, par exemple $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$,

série numérique $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, par exemple $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$,

série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, par exemple $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$.

Je renvoie à l'aide-mémoire pour ces notions d'analyse qui seront indispensables pour bien fonder le développement qui suit.

12/36

Séries formelles : « polynômes de degré infini »

Définition

Une **série formelle** est une expression de la forme $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$.

Ici Z n'est qu'une variable formelle (et non un nombre).

De même P n'est qu'une série formelle (et non une fonction).

Ce qui compte est seule la suite des coefficients $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{C} :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k \iff a_k = b_k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Si $a_k = 0$ pour tout $k > n$ il s'agit d'un polynôme $\sum_{k=0}^n a_k Z^k$.

On peut définir les opérations formelles usuelles :

Addition :
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k \right) := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) Z^k$$

Multiplication :
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} \right) Z^k$$

Dérivation :
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k \right)' := \sum_{k=1}^{\infty} (k a_k) Z^{k-1} := \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} Z^k$$

§2.1

13/36 §2.2

Rayon de convergence

On considère une série formelle $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$.

Pour quels $z \in \mathbb{C}$ la série numérique $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge-t-elle ?

Exemples

La série $\sum k! z^k$ converge pour $z = 0$ mais diverge pour tout $z \neq 0$.

La série $\sum z^k$ converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$.

La série $\sum \frac{1}{k!} z^k$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème

Pour toute série formelle $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$ il existe un nombre $\rho_P \in [0, +\infty]$, appelé le **rayon de convergence** de P , tel que

■ Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \rho_P$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge.

■ Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > \rho_P$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ diverge.

Ce rayon est donné par $\rho_P^{-1} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$.

Par exemple, si $|a_k| \leq M \rho^{-k}$ pour tout $k \geq k_0$, alors $\rho_P \geq \rho$ et la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$.

14/36

Rayon de convergence : démonstration

Lemme

Supposons que $(a_k z_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$ reste bornée pour un $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

C'est le cas, par exemple, si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k$ converge, puisque $a_k z_1^k \rightarrow 0$.

Alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge absolument pour tout z vérifiant $|z| < |z_1|$.

Démonstration du lemme.

Nous avons $M := \sup |a_k z_1^k| < \infty$ ainsi que $q := \frac{|z|}{|z_1|} < 1$.

Ceci implique que $|a_k z^k| = |a_k z_1^k| \cdot \left| \frac{z^k}{z_1^k} \right| = |a_k z_1^k| \cdot q^k \leq M q^k$.

On conclut par comparaison avec la série géométrique :

$$\sum_{k=0}^n |a_k z^k| \leq \sum_{k=0}^n M q^k = M \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \leq M \frac{1}{1-q}. \quad \square$$

Démonstration du théorème.

Pour $0 < \rho < \rho_P$ on a $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} \cdot \rho < 1$.

Ainsi $\sqrt[k]{|a_k|} \cdot \rho \leq \rho_0 < 1$ donc $|a_k| \rho^k \leq \rho_0^k \rightarrow 0$.

On voit en particulier que la suite $(a_k \rho^k)_{k \in \mathbb{N}}$ reste bornée.

On conclut que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge pour tout z vérifiant $|z| < \rho < \rho_P$.

Pour $|z| > \rho_P$ on a $\limsup |a_k z^k| = \infty$ et $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ diverge. \square

§2.2

15/36 §2.2

Séries entières

On note $B(z_0, \rho) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\}$

le disque ouvert de rayon ρ centré en z_0 .

En particulier $B(z_0, 0) = \emptyset$ et $B(z_0, \infty) = \mathbb{C}$.



Théorème

Toute série formelle $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$ d'un rayon de convergence $\rho_P > 0$ définit une fonction

$$f_P: B(0, \rho_P) \rightarrow \mathbb{C} \text{ par } f_P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

La fonction f_P est continue et dérivable sur tout le disque $B(0, \rho_P)$.

Sa dérivée f_P' est donnée par la série formelle $P' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k Z^{k-1}$, qui a le même rayon de convergence $\rho_{P'} = \rho_P$:

$$f_P'(z) = f_{P'}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

En itérant cet argument, on voit que f_P est infiniment dérivable.

En particulier on retrouve les coefficients $a_k = \frac{f_P^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

16/36

Séries entières : démonstration

Vérifions d'abord que $\rho_{P'} = \rho_P$. Puisque $\sqrt[k]{k} \rightarrow 1$ nous trouvons que

$$\rho_{P'}^{-1} = \limsup \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \rho_P^{-1}.$$

Ainsi $f_{P'}$ est définie sur $B(0, \rho_P)$. Nous voulons montrer que

$$f'_{P'}(z) := \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \text{ existe et coïncide avec } f_{P'}(z)$$

pour tout $z \in B(z_0, \rho_P)$. Ceci découle du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f_{P'}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{w^k - z^k}{w - z} - kz^{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left[(w-z) \sum_{j=1}^{k-1} jw^{k-j-1}z^{j-1} \right] = (w-z) \sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-1} jw^{k-j-1}z^{j-1}. \end{aligned}$$

Pour $|w|, |z| < \rho < \rho_P$ nous avons donc

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f_{P'}(z) \right| \leq |w - z| \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| k^2 \rho^{k-2} \leq |w - z| \cdot \text{const.}$$

Pour $w \rightarrow z$ on trouve ainsi que f_P est dérivable et que $f'_{P'} = f_{P'}$. \square

§2.2

17/36 §2.2

Séries entières : addition et multiplication

Théorème

Soient $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ deux séries formelles qui convergent sur le disque $B(0, \rho)$, c'est-à-dire que $\rho_P, \rho_Q \geq \rho$.

Alors les séries formelles $P + Q$ et $P \cdot Q$ convergent sur $B(0, \rho)$ et

$$f_{P+Q} = f_P + f_Q \quad \text{et} \quad f_{P \cdot Q} = f_P \cdot f_Q.$$

Démonstration. Pour tout $z \in B(0, \rho)$ nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k (a_{\ell} b_{k-\ell}) z^k &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j \right). \end{aligned}$$

La dernière égalité découle de la multiplication et le réarrangement des séries absolument convergentes. \square

18/36

Séries entières : dérivation et intégration

Exemple (la série exponentielle)

Pour la série formelle $P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$ on trouve :

$$P' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} X^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} X^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k = P$$

Comme $\rho_P = \infty$, la fonction $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ est dérivable, et la dérivée formelle $P' = P$ implique que $f' = f$.

Remarque

L'intégration de séries entières fonctionne de manière analogue :

$$f: B(z_0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

a pour primitive

$$g: B(z_0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k.$$

où $b_k = \frac{1}{k} a_{k-1}$ pour $k \geq 1$, et b_0 est la constante d'intégration.

§2.2

19/36 §2.2

Exemples de développements en série

Exemple (le logarithme naturel \ln)

Considérons $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x)$.

On a $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$ pour $|x| < 1$.

Par intégration on obtient $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ pour $|x| < 1$.

⚠ Bien que f soit définie sur $] -1, \infty[$, le développement en série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ ne converge que pour $x \in] -1, +1[$.

En $x = -1$ la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = -\infty$ diverge (série harmonique).

En $x = 1$ la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge (série alternée, Leibniz).

Exemple (la fonction arctan)

Considérons $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(x)$.

On a $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$ pour $|x| < 1$.

Par intégration on obtient $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ pour $|x| < 1$.

⚠ Bien que f soit définie sur tout \mathbb{R} , le développement en série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ ne converge que pour $x \in] -1, +1[$.

20/36

Série de Taylor

Nous avons vu qu'une série entière est infiniment dérivable (C^∞).
On pourrait espérer qu'une fonction C^∞ se développe en série :

Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ .
La **série de Taylor** de $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ est définie par

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

⚠ Le rayon de convergence de T n'est pas forcément > 0 .
On devrait donc parler prudemment de la série **formelle** de Taylor.

⚠ Même si $T(x)$ converge, la limite n'est pas forcément $f(x)$.

Exemple (une fonction remarquable)

La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
est infiniment dérivable et $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k . Ainsi $T = 0$.

§2.3

§2.3

Une fonction remarquable

Proposition

La fonction $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0, \end{cases}$ est infiniment dérivable et
 $f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ p_k(\frac{1}{x})e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0, \end{cases}$ pour un certain polynôme p_k .

Démonstration. L'énoncé est vrai pour $f = f^{(0)}$ où $p_0 = 1$.

Supposons l'hypothèse vraie pour $f^{(k)}$.

Alors $f^{(k)}$ est continue : pour $x \rightarrow 0$ on a $f(x) \rightarrow 0$.

Sur $\mathbb{R}_{>0}$ la fonction $f^{(k)}$ est dérivable avec pour dérivée

$$f^{(k+1)}(x) = \left[-\frac{1}{x^2} p_k'(\frac{1}{x}) + \frac{2}{x^3} p_k(\frac{1}{x}) \right] e^{-1/x^2} = p_{k+1}(\frac{1}{x}) e^{-1/x^2}.$$

Sur $\mathbb{R}_{<0}$ on a $f^{(k+1)}(x) = 0$. En 0 on trouve la dérivée

$$\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \frac{1}{x} p_k(\frac{1}{x}) e^{-1/x^2} \rightarrow 0 \quad \text{pour } x \rightarrow 0,$$

donc $f^{(k+1)}(0) = 0$. On conclut par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. \square

§2.3

Fonctions développables en série

Définition

On dit qu'une fonction f est **développable en série** ou **analytique** en x_0 si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ pour tout $x \in B(x_0, \rho)$ et $\rho > 0$.

Remarque

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ pour tout $x \in B(x_0, \rho)$, alors $f \in C^\infty$ et $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$. Ainsi $f(x) = T(x)$ pour tout $x \in B(x_0, \rho)$.

Remarque

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ , càd infiniment dérivable.
D'après Taylor-Lagrange on a toujours $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ où
 $T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ et $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$.
Ainsi $f(x) = T(x)$ si et seulement si $R_n(x) \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$.

Remarque : Si une fonction réelle est analytique, alors elle s'étend (localement) en une fonction complexe définie par la même série.

§2.3

§2.3

Opérations sur les développements en séries

Théorème

Soient $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$ deux développements en séries sur $B(x_0, \rho)$.

Alors les fonctions suivantes sont développables en séries :

$$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) (x - x_0)^k \quad \text{sur } B(x_0, \rho),$$

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^k a_\ell b_{k-\ell} \right) (x - x_0)^k \quad \text{sur } B(x_0, \rho).$$

Supposons en plus que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - x_0| < \rho$.
Alors $\frac{1}{f}$ est développable en série sur $B(x_0, \rho)$.

Exemple : $f(x) = 1 + x^2$ est développable en série (sur tout \mathbb{R}).
On a $f(z) \neq 0$ pour $|z| < 1$, mais $f(z) = 0$ pour $z = \pm i$ (dans \mathbb{C} !).
Ceci explique pourquoi la série $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$
 $a \rho = 1$ pour rayon de convergence (et non $\rho = \infty$).

§2.3

Exemples de calcul avec des séries

Exemple (formules d'Euler)

On a déjà vu que \exp est développable en série :

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Les formules d'Euler donnent les développements bien connus :

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il en est de même pour

$$\cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sinh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

12.3

25.96

C Composition de séries

Lemme (composition de séries formelles)

Soit $F = \sum_{j=1}^{\infty} a_j X^j$ une série formelle vérifiant $F(0) = 0$.

Alors la puissance F^k n'a pas de termes de degré $< k$.

Pour toute série formelle $G = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Y^k$ on peut ainsi définir

$$G \circ F := \sum_{k=0}^{\infty} b_k F^k = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} X^{\ell}.$$

À noter que pour chaque c_{ℓ} la somme est finie. □

Théorème (composition de séries entières)

Si f est analytique en x_0 et si g est analytique en $y_0 = f(x_0)$,

alors leur composée $g \circ f$ est analytique en x_0 :

Soit $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ sur $B(x_0, \rho)$

et soit $g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (y - y_0)^k$ sur $B(y_0, \eta)$.

Supposons en plus que $f(B(x_0, \rho)) \subset B(y_0, \eta)$.

Alors $g(f(x)) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} (x - x_0)^{\ell}$ sur $B(x_0, \rho)$. □

26.96

C Exemple de composition de séries formelles

Composons $F = \log(1 + X) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} X^j$ et

$G = \exp(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Y^k$. Les puissances de F sont

$$F = X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{4}X^4 + \frac{1}{5}X^5 + \dots$$

$$F^2 = X^2 - X^3 + \frac{11}{12}X^4 - \frac{5}{6}X^5 + \dots$$

$$F^3 = X^3 - \frac{3}{2}X^4 + \frac{7}{4}X^5 + \dots$$

$$F^4 = X^4 - 2X^5 + \dots$$

$$F^5 = X^5 + \dots$$

Explicitons ensuite les termes $\frac{1}{k!} F^k$:

$$F = X - \frac{1}{2!}X^2 + \frac{2}{3!}X^3 - \frac{6}{4!}X^4 + \frac{24}{5!}X^5 + \dots$$

$$\frac{1}{2!}F^2 = \frac{1}{2!}X^2 - \frac{3}{3!}X^3 + \frac{11}{4!}X^4 - \frac{50}{5!}X^5 + \dots$$

$$\frac{1}{3!}F^3 = \frac{1}{3!}X^3 - \frac{6}{4!}X^4 + \frac{35}{5!}X^5 + \dots$$

$$\frac{1}{4!}F^4 = \frac{1}{4!}X^4 - \frac{10}{5!}X^5 + \dots$$

$$\frac{1}{5!}F^5 = \frac{1}{5!}X^5 + \dots$$

Pour la composée $G \circ F = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k$ on trouve ainsi

$$G \circ F = 1 + F + \frac{1}{2!}F^2 + \frac{1}{3!}F^3 + \frac{1}{4!}F^4 + \frac{1}{5!}F^5 + \dots = 1 + X.$$

12.3

27.96

C Exemple de composition de séries entières

Soit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ une série entière, $\rho_f > 0$.

On se propose de développer $\frac{1}{f(z)}$ en série en 0.

D'abord il faut que $f(0) \neq 0$. Cette condition est aussi suffisante :

On a $f(z) = a_0 + g(z)$ tel que $a_0 \neq 0$ et $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0 + g(z)} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{g(z)}{a_0}\right)} = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{g(z)}{a_0}\right)^k.$$

Cette série converge si $|g(z)| < |a_0|$, ce qui assure $f(z) \neq 0$.

Corollaire

Soit f une fonction développable en série en z_0 .

Si $f(z_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est développable en série en z_0 . □

26.96

C Exemple de composition de séries entières

Exemple

La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$
n'est pas analytique en $x_0 = 0$ mais elle l'est en tout $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

En $x_0 < 0$ on trouve la série de Taylor $T = 0$, donc $T \neq f$.

En $x_0 > 0$ on peut développer $h(x) = \frac{1}{x}$ en la série

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} \left(1 - \frac{x_0 - x}{x_0}\right)^{-1} = \frac{1}{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x_0 - x}{x_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x_0^{k+1}} (x - x_0)^k.$$

Elle converge pour tout $x \in B(x_0, |x_0|)$, évitant justement $x = 0$.

La fonction $g(y) = e^{-y^2}$ est aussi développable en série :

$$e^{-y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-y^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} y^{2k} \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

La composée $g(h(x)) = \exp(-1/x^2)$ se développe en $x_0 \neq 0$ en la série composée, qui converge pour tout $x \in B(x_0, |x_0|)$.

3.2

29.36

Fonctions usuelles développées en séries (1/2)

Nous venons d'établir les développements suivants :

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}, \quad |z| < 1$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Exercice

Pour entraînement, déduire de ces séries que $\exp'(z) = \exp(z)$ et $\ln'(1+z) = \frac{1}{1+z}$ ainsi que $\sin'(z) = \cos(z)$ et $\cos'(z) = -\sin(z)$, puis la formule d'Euler $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$.

30.76

Fonctions usuelles développées en séries (2/2)

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\arctan(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}, \quad |z| < 1$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k, \quad |z| < 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

Ici $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \prod_{j=1}^k \frac{\alpha-j+1}{j}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
Pour $\alpha \in \mathbb{N}$ on trouve un polynôme (rayon de convergence = ∞).

3.1

31.36

Retour sur l'implémentation de $\exp(x)$

Objectif : On veut approcher $\exp(x)$ à $\varepsilon = 10^{-20}$ près où $x \in [0, 1]$.

Approximation : On sait que $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Or, sur ordinateur on ne peut calculer qu'un nombre fini de termes !

Si l'on prend $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ il reste à majorer $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Lemme : On a $R_n(x) \leq 2 \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ pour tout $|x| \leq 1 + n/2$.

(C'est un peu mieux que l'estimation selon Taylor-Lagrange.)

Preuve : On compare avec la série géométrique :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = 2 \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Pour $x \in [0, 1]$ le choix $n = 21$ assure que $|R_n(x)| \leq 10^{-20}$.

⚠ Pour $|x|$ (très) grand il faut choisir n (très) grand.
Il vaut mieux éviter ce problème et réduire l'argument ! (voir plus haut)

32.36

Exemple : implémentation de $\ln(x)$

Objectif :

On veut approcher $\ln(1+x)$ où $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ à $\varepsilon = 10^{-20}$ près.

Approximation :

On sait que $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ pour tout $x \in]-1, +1[$.

Sur ordinateur on ne peut calculer qu'un nombre fini de termes !

Considérons donc $T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.

Majoration du reste : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.

Pour $|x| \leq \frac{1}{2}$ on peut comparer avec la série géométrique :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2^{-n}.$$

Pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ le choix $n = 67$ assure que $|R_n(x)| \leq 10^{-20}$.

⚠ Proche des bords la convergence devient de plus en plus lente.

Dans l'extrémité $x = 1$ la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge (vers $\ln 2$), mais seulement **très lentement!** Trop lentement pour être profitable.

33.2

33.2

Exemple : implémentation de $\ln(x)$ (suite)

On a intérêt à choisir, si possible, une série qui converge rapidement !

Personne ne nous oblige de calculer $\ln(1+x)$ par $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$.

Astuce : Pour $|t| < 1$ nous avons

$$\ln(1+t) = +t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6} + \dots$$

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6} - \dots$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \ln(1+t) - \ln(1-t) = 2\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \dots\right)$$

Cette série converge, comme la série géométrique, pour $|t| < 1$.

Par exemple pour $t = \frac{1}{3}$ on obtient $\frac{1+t}{1-t} = 2$, et la série

$\ln 2 = \frac{2}{1 \cdot 3} - \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \dots$ converge assez rapidement.

Avec $t \in [0, \frac{1}{3}]$ on peut ainsi calculer $\ln(x)$ pour tout $x \in [1, 2]$.

Réduction de l'argument : On se ramène à l'intervalle $x \in [1, 2]$.

- Pour $x \in [1, 2]$ le calcul de $\ln(x)$ est facile, avec notre astuce.
- Pour $x > 2$ on applique la formule $\ln(x) = \ln(x/2^k) + k \ln(2)$.
- Pour $0 < x < 1$ on applique la formule $\ln(x) = -\ln(\frac{1}{x})$.

34.6

Exemple : fonctions de Bessel

Objectif : Les fonctions de Bessel apparaissent en physique comme solution de l'équation différentielle

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2) y = 0 \quad \text{pour } m \in \mathbb{Z} \text{ fixé.}$$

Comment calculer concrètement ces fonctions ?

Développement en série formelle :

Cherchons une solution en série formelle $Y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k X^k + \sum_{k=0}^{\infty} k a_k X^k + \sum_{k=0}^{\infty} (X^2 - m^2) a_k X^k = 0$$

soit encore

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - m^2 + X^2) a_k X^k = 0$$

Calcul récursif des coefficients :

Prenons le cas $m = 0$ pour simplifier. On a alors

$$a_1 X^1 + [2^2 a_2 + a_0] X^2 + [3^2 a_3 + a_1] X^3 + [4^2 a_4 + a_2] X^4 + \dots = 0$$

Ceci laisse le choix de $a_0 \in \mathbb{R}$ mais impose $a_1 = 0$, puis

$$a_k = -\frac{1}{k^2} a_{k-2} \quad \text{pour tout } k \geq 2.$$

On trouve ainsi $a_{2j+1} = 0$ et $a_{2j} = (-1)^j \frac{a_0}{4^j (j!)^2}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

33.3

33.3

Exemple : fonctions de Bessel (suite)

Rayon de convergence : $\sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} x^{2j}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Par construction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} x^{2j}$, est analytique.

On a ainsi trouvé une solution de l'équation différentielle de départ :

$$g(x) = x^2 f''(x) + x f'(x) + x^2 f(x)$$

est analytique sur \mathbb{R} et donnée par la série 0, donc $g = 0$.

Implémentation sur ordinateur :

Notre série converge à peu près aussi rapidement que $\sin(x)$.

On peut donc facilement calculer une valeur approchée :

- On fixe un intervalle $[a, b]$ et un écart toléré $\varepsilon > 0$.
- On détermine n tel que le reste $R_n(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{2j} x^{2j}$ satisfasse $|R_n(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$.
- On approche la fonction $f(x)$ par le polynôme $\sum_{j=0}^n a_{2j} x^{2j}$.
Pour $x \in [a, b]$ on garantit ainsi un erreur absolue $< \varepsilon$.

Observons aussi que $|a_{2j} x^{2j}| < |a_{2j-2} x^{2j-2}|$ si $j > |x|$.

Notre série satisfait donc au critère de Leibniz pour $j > |x|$.

34.6