

# Mathématiques assistées par ordinateur

## Chapitre 4 : Racines des polynômes réels et complexes

Michael Eisermann

Mat249, DLST L2S4, Année 2008-2009

[www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm/cours#mao](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm/cours#mao)

Document mis à jour le 6 juillet 2009



- 1 Équations polynomiales et existence des racines
- 2 Localisation effective des racines réelles et complexes

- 1 Équations polynomiales et existence des racines
  - Équations polynomiales : degré  $\leq 4$  vs degré  $\geq 5$
  - Racines rationnelles : recherche exhaustive
  - Localisation grossière des racines : la borne de Cauchy
- 2 Localisation effective des racines réelles et complexes

# Équations polynomiales

On veut résoudre une équation polynomiale (réelle ou complexe)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

# Équations polynomiales

On veut résoudre une équation polynomiale (réelle ou complexe)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Degré 1 : Pour l'équation  $x + a_0 = 0$  on trouve la solution  $x = -a_0$ .

# Équations polynomiales

On veut résoudre une équation polynomiale (réelle ou complexe)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Degré 1 : Pour l'équation  $x + a_0 = 0$  on trouve la solution  $x = -a_0$ .

Degré 2 : Pour  $x^2 + px + q = 0$  on trouve

# Équations polynomiales

On veut résoudre une équation polynomiale (réelle ou complexe)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

Degré 1 : Pour l'équation  $x + a_0 = 0$  on trouve la solution  $x = -a_0$ .

Degré 2 : Pour  $x^2 + px + q = 0$  on trouve

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

# La formule de Tartaglia–Cardano

En degré 3 on cherche à résoudre

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$



# La formule de Tartaglia–Cardano

En degré 3 on cherche à résoudre

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

D'abord on substitue  $x = y - a/3$  pour éliminer le terme quadratique :

$$y^3 + py + q = 0.$$

# La formule de Tartaglia–Cardano

En degré 3 on cherche à résoudre

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

D'abord on substitue  $x = y - a/3$  pour éliminer le terme quadratique :

$$y^3 + py + q = 0.$$

Après un petit calcul on trouve  $p = b - \frac{a^2}{3}$  et  $q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}$ .

# La formule de Tartaglia–Cardano

En degré 3 on cherche à résoudre

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

D'abord on substitue  $x = y - a/3$  pour éliminer le terme quadratique :

$$y^3 + py + q = 0.$$

Après un petit calcul on trouve  $p = b - \frac{a^2}{3}$  et  $q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}$ .

Ensuite on remplace  $y = z - p/3z$  et multiplie toute l'équation par  $z^3$  :

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

# La formule de Tartaglia–Cardano

En degré 3 on cherche à résoudre

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

D'abord on substitue  $x = y - a/3$  pour éliminer le terme quadratique :

$$y^3 + py + q = 0.$$

Après un petit calcul on trouve  $p = b - \frac{a^2}{3}$  et  $q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}$ .

Ensuite on remplace  $y = z - p/3z$  et multiplie toute l'équation par  $z^3$  :

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

C'est une équation quadratique en  $z^3$  !

# La formule de Tartaglia–Cardano

En degré 3 on cherche à résoudre

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

D'abord on substitue  $x = y - a/3$  pour éliminer le terme quadratique :

$$y^3 + py + q = 0.$$

Après un petit calcul on trouve  $p = b - \frac{a^2}{3}$  et  $q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}$ .

Ensuite on remplace  $y = z - p/3z$  et multiplie toute l'équation par  $z^3$  :

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

C'est une équation quadratique en  $z^3$  ! On en déduit que

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Ceci permet de calculer  $z^3$  puis  $z$ , puis  $y$ , et finalement  $x$ .

# La formule de Tartaglia–Cardano

En degré 3 on cherche à résoudre

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

D'abord on substitue  $x = y - a/3$  pour éliminer le terme quadratique :

$$y^3 + py + q = 0.$$

Après un petit calcul on trouve  $p = b - \frac{a^2}{3}$  et  $q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}$ .

Ensuite on remplace  $y = z - p/3z$  et multiplie toute l'équation par  $z^3$  :

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

C'est une équation quadratique en  $z^3$  ! On en déduit que

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Ceci permet de calculer  $z^3$  puis  $z$ , puis  $y$ , et finalement  $x$ .

# Existence des racines

On veut résoudre une équation polynomiale (réelle ou complexe)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

# Existence des racines

On veut résoudre une équation polynomiale (réelle ou complexe)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Degré 1 : on trouve  $x = -a_0$ .



# Existence des racines

On veut résoudre une équation polynomiale (réelle ou complexe)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Degré 1 : on trouve  $x = -a_0$ .

Degré 2 : on trouve  $x = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$ .

# Existence des racines

On veut résoudre une équation polynomiale (réelle ou complexe)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Degré 1 : on trouve  $x = -a_0$ .

Degré 2 : on trouve  $x = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$ .

Degré 3 : formule de Tartaglia (1530), publiée par Cardano (1545)

# Existence des racines

On veut résoudre une équation polynomiale (réelle ou complexe)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Degré 1 : on trouve  $x = -a_0$ .

Degré 2 : on trouve  $x = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$ .

Degré 3 : formule de Tartaglia (1530), publiée par Cardano (1545)

Degré 4 : formule de Ferrari (1540), un élève de Cardano

# Existence des racines

On veut résoudre une équation polynomiale (réelle ou complexe)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Degré 1 : on trouve  $x = -a_0$ .

Degré 2 : on trouve  $x = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$ .

Degré 3 : formule de Tartaglia (1530), publiée par Cardano (1545)

Degré 4 : formule de Ferrari (1540), un élève de Cardano

**Théorème (Ruffini 1799, Abel 1824, Galois 1832)**

*En degré  $\geq 5$  aucune formule générale de ce type n'existe, construite à partir des opérations  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ , et des radicaux  $\sqrt[k]{\phantom{x}}$ .*

# Existence des racines

On veut résoudre une équation polynomiale (réelle ou complexe)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Degré 1 : on trouve  $x = -a_0$ .

Degré 2 : on trouve  $x = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$ .

Degré 3 : formule de Tartaglia (1530), publiée par Cardano (1545)

Degré 4 : formule de Ferrari (1540), un élève de Cardano

**Théorème (Ruffini 1799, Abel 1824, Galois 1832)**

*En degré  $\geq 5$  aucune formule générale de ce type n'existe, construite à partir des opérations  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ , et des radicaux  $\sqrt[k]{\phantom{x}}$ .*

**Théorème (de Gauss–d'Alembert)**

*Pour tout polynôme  $F = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$  dans  $\mathbb{C}[X]$  il existe  $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{C}$  tels que  $F = (X - r_1)(X - r_2) \cdots (X - r_n)$ .*

# Racines rationnelles d'un polynôme rationnel

## Proposition

*Considérons  $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$  dans  $\mathbb{Z}[X]$ .*

# Racines rationnelles d'un polynôme rationnel

## Proposition

*Considérons  $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$  dans  $\mathbb{Z}[X]$ .*

*Si  $P(\frac{p}{q}) = 0$  où  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ , alors  $p \mid a_0$  et  $q \mid a_n$ .*

# Racines rationnelles d'un polynôme rationnel

## Proposition

*Considérons  $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$  dans  $\mathbb{Z}[X]$ .*

*Si  $P(\frac{p}{q}) = 0$  où  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ , alors  $p \mid a_0$  et  $q \mid a_n$ .*

*Si  $a_0 \neq 0$  et  $a_n \neq 0$ , il n'existe qu'un nombre fini de candidats  $\frac{p}{q}$ .*



# Racines rationnelles d'un polynôme rationnel

## Proposition

Considérons  $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$  dans  $\mathbb{Z}[X]$ .

Si  $P(\frac{p}{q}) = 0$  où  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ , alors  $p \mid a_0$  et  $q \mid a_n$ .

Si  $a_0 \neq 0$  et  $a_n \neq 0$ , il n'existe qu'un nombre fini de candidats  $\frac{p}{q}$ .

**Démonstration.** Nous avons

$$q^n P\left(\frac{p}{q}\right) = a_0q^n + a_1q^{n-1}p^1 + \cdots + a_{n-1}q^1p^{n-1} + a_np^n.$$

# Racines rationnelles d'un polynôme rationnel

## Proposition

Considérons  $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$  dans  $\mathbb{Z}[X]$ .

Si  $P(\frac{p}{q}) = 0$  où  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ , alors  $p \mid a_0$  et  $q \mid a_n$ .

Si  $a_0 \neq 0$  et  $a_n \neq 0$ , il n'existe qu'un nombre fini de candidats  $\frac{p}{q}$ .

**Démonstration.** Nous avons

$$q^n P\left(\frac{p}{q}\right) = a_0q^n + a_1q^{n-1}p^1 + \cdots + a_{n-1}q^1p^{n-1} + a_np^n.$$

Si  $P(\frac{p}{q}) = 0$ , alors  $p \mid a_0q^n$  et  $q \mid a_np^n$ .

# Racines rationnelles d'un polynôme rationnel

## Proposition

Considérons  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  dans  $\mathbb{Z}[X]$ .

Si  $P(\frac{p}{q}) = 0$  où  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ , alors  $p \mid a_0$  et  $q \mid a_n$ .

Si  $a_0 \neq 0$  et  $a_n \neq 0$ , il n'existe qu'un nombre fini de candidats  $\frac{p}{q}$ .

**Démonstration.** Nous avons

$$q^n P\left(\frac{p}{q}\right) = a_0q^n + a_1q^{n-1}p^1 + \dots + a_{n-1}q^1p^{n-1} + a_np^n.$$

Si  $P(\frac{p}{q}) = 0$ , alors  $p \mid a_0q^n$  et  $q \mid a_np^n$ .

Puisque  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ , on a  $p \mid a_0$  et  $q \mid a_n$ . □

# Racines rationnelles d'un polynôme rationnel

## Proposition

Considérons  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  dans  $\mathbb{Z}[X]$ .

Si  $P(\frac{p}{q}) = 0$  où  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ , alors  $p \mid a_0$  et  $q \mid a_n$ .

Si  $a_0 \neq 0$  et  $a_n \neq 0$ , il n'existe qu'un nombre fini de candidats  $\frac{p}{q}$ .

**Démonstration.** Nous avons

$$q^n P\left(\frac{p}{q}\right) = a_0q^n + a_1q^{n-1}p^1 + \dots + a_{n-1}q^1p^{n-1} + a_np^n.$$

Si  $P(\frac{p}{q}) = 0$ , alors  $p \mid a_0q^n$  et  $q \mid a_np^n$ .

Puisque  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ , on a  $p \mid a_0$  et  $q \mid a_n$ . □

## Corollaire

En testant tous les candidats, ceci permet de trouver toutes les racines rationnelles d'un polynôme rationnel donné. □

## Exercice

Déterminer les entiers  $n \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{Z}$  pour lesquels  $\sqrt[n]{a}$  est rationnel.

## Définition (borne de Cauchy)

Soit  $F = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1X + c_0$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

## Définition (borne de Cauchy)

Soit  $F = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_1X + c_0$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

On pose  $M := \max\{|c_0|, \dots, |c_{n-1}|\}$  et  $\rho_F := 1 + M$ .

# Localisation grossière : la borne de Cauchy

## Définition (borne de Cauchy)

Soit  $F = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_1X + c_0$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .  
On pose  $M := \max\{|c_0|, \dots, |c_{n-1}|\}$  et  $\rho_F := 1 + M$ .

## Théorème (localisation grossière des racines)

*Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| \geq \rho_F$  on a  $|F(z)| \geq 1$ .*

# Localisation grossière : la borne de Cauchy

## Définition (borne de Cauchy)

Soit  $F = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_1X + c_0$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .  
On pose  $M := \max\{|c_0|, \dots, |c_{n-1}|\}$  et  $\rho_F := 1 + M$ .

## Théorème (localisation grossière des racines)

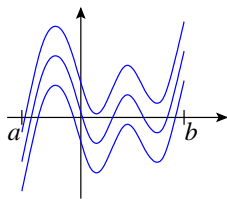
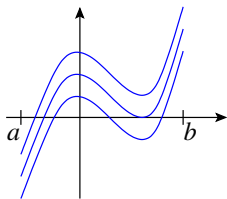
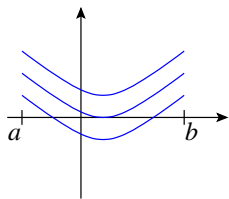
*Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| \geq \rho_F$  on a  $|F(z)| \geq 1$ . Par conséquent, toute racine complexe de  $F$  est dans  $B(\rho_F) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho_F\}$ .*



- 1 Équations polynomiales et existence des racines
- 2 Localisation effective des racines réelles et complexes
  - Les règles de Descartes et de Budan–Fourier
  - Racines réelles : indice de Cauchy et suites de Sturm
  - Racines complexes : localisation dans le plan complexe

# Racines réelles d'un polynôme réel

**Objectif :** Comment déterminer/majorer le nombre de racines d'un polynôme réel  $P \in \mathbb{R}[X]$  dans un intervalle donné  $[a, b]$  ?



## Variation de signes : définition

$$V(+, -) = V(-, +) = 1,$$

$$V(+, +) = V(-, -) = V(0, 0) = 0,$$

$$V(+, 0) = V(0, +) = V(-, 0) = V(0, -) = \frac{1}{2}.$$

## Variation de signes : définition

$$\begin{aligned}V(+, -) &= V(-, +) = 1, \\V(+, +) &= V(-, -) = V(0, 0) = 0, \\V(+, 0) &= V(0, +) = V(-, 0) = V(0, -) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

### Définition (changements de signes, zéros inclus)

Pour une suite  $(s_0, \dots, s_n)$  d'éléments dans  $\mathbb{R}$  nous posons

$$V(s_0, \dots, s_n) := \sum_{k=1}^n V(s_{k-1}, s_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} |\text{sign}(s_{k-1}) - \text{sign}(s_k)|.$$

# Variation de signes : définition

$$\begin{aligned}V(+, -) &= V(-, +) = 1, \\V(+, +) &= V(-, -) = V(0, 0) = 0, \\V(+, 0) &= V(0, +) = V(-, 0) = V(0, -) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

## Définition (changements de signes, zéros inclus)

Pour une suite  $(s_0, \dots, s_n)$  d'éléments dans  $\mathbb{R}$  nous posons

$$V(s_0, \dots, s_n) := \sum_{k=1}^n V(s_{k-1}, s_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} |\text{sign}(s_{k-1}) - \text{sign}(s_k)|.$$

Pour une suite  $(S_0, \dots, S_n)$  de polynômes dans  $\mathbb{R}[X]$  nous posons

$$V_a(S_0, \dots, S_n) := V(S_0(a), \dots, S_n(a)).$$

# Variation de signes : définition

$$\begin{aligned}V(+, -) &= V(-, +) = 1, \\V(+, +) &= V(-, -) = V(0, 0) = 0, \\V(+, 0) &= V(0, +) = V(-, 0) = V(0, -) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

## Définition (changements de signes, zéros inclus)

Pour une suite  $(s_0, \dots, s_n)$  d'éléments dans  $\mathbb{R}$  nous posons

$$V(s_0, \dots, s_n) := \sum_{k=1}^n V(s_{k-1}, s_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} |\text{sign}(s_{k-1}) - \text{sign}(s_k)|.$$

Pour une suite  $(S_0, \dots, S_n)$  de polynômes dans  $\mathbb{R}[X]$  nous posons

$$V_a(S_0, \dots, S_n) := V(S_0(a), \dots, S_n(a)).$$

Pour la différence en  $a, b \in \mathbb{R}$  nous écrivons  $V_a^b := V_a - V_b$ .

# Variation de signes : définition

$$\begin{aligned}V(+, -) &= V(-, +) = 1, \\V(+, +) &= V(-, -) = V(0, 0) = 0, \\V(+, 0) &= V(0, +) = V(-, 0) = V(0, -) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

## Définition (changements de signes, zéros inclus)

Pour une suite  $(s_0, \dots, s_n)$  d'éléments dans  $\mathbb{R}$  nous posons

$$V(s_0, \dots, s_n) := \sum_{k=1}^n V(s_{k-1}, s_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} |\text{sign}(s_{k-1}) - \text{sign}(s_k)|.$$

Pour une suite  $(S_0, \dots, S_n)$  de polynômes dans  $\mathbb{R}[X]$  nous posons

$$V_a(S_0, \dots, S_n) := V(S_0(a), \dots, S_n(a)).$$

Pour la différence en  $a, b \in \mathbb{R}$  nous écrivons  $V_a^b := V_a - V_b$ .

## Définition (changements de signes, zéros exclus)

On forme d'abord la suite réduite  $\hat{s}$  en supprimant les éléments nuls,

# Variation de signes : définition

$$\begin{aligned}V(+, -) &= V(-, +) = 1, \\V(+, +) &= V(-, -) = V(0, 0) = 0, \\V(+, 0) &= V(0, +) = V(-, 0) = V(0, -) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

## Définition (changements de signes, zéros inclus)

Pour une suite  $(s_0, \dots, s_n)$  d'éléments dans  $\mathbb{R}$  nous posons

$$V(s_0, \dots, s_n) := \sum_{k=1}^n V(s_{k-1}, s_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} |\text{sign}(s_{k-1}) - \text{sign}(s_k)|.$$

Pour une suite  $(S_0, \dots, S_n)$  de polynômes dans  $\mathbb{R}[X]$  nous posons

$$V_a(S_0, \dots, S_n) := V(S_0(a), \dots, S_n(a)).$$

Pour la différence en  $a, b \in \mathbb{R}$  nous écrivons  $V_a^b := V_a - V_b$ .

## Définition (changements de signes, zéros exclus)

On forme d'abord la suite réduite  $\hat{s}$  en supprimant les éléments nuls, puis on définit  $\hat{V}(s) := V(\hat{s})$ .



# Variation de signes : définition

$$\begin{aligned}V(+, -) &= V(-, +) = 1, \\V(+, +) &= V(-, -) = V(0, 0) = 0, \\V(+, 0) &= V(0, +) = V(-, 0) = V(0, -) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

## Définition (changements de signes, zéros inclus)

Pour une suite  $(s_0, \dots, s_n)$  d'éléments dans  $\mathbb{R}$  nous posons

$$V(s_0, \dots, s_n) := \sum_{k=1}^n V(s_{k-1}, s_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} |\text{sign}(s_{k-1}) - \text{sign}(s_k)|.$$

Pour une suite  $(S_0, \dots, S_n)$  de polynômes dans  $\mathbb{R}[X]$  nous posons

$$V_a(S_0, \dots, S_n) := V(S_0(a), \dots, S_n(a)).$$

Pour la différence en  $a, b \in \mathbb{R}$  nous écrivons  $V_a^b := V_a - V_b$ .

## Définition (changements de signes, zéros exclus)

On forme d'abord la suite réduite  $\hat{s}$  en supprimant les éléments nuls, puis on définit  $\hat{V}(s) := V(\hat{s})$ . De même pour  $\hat{V}_a$  et  $\hat{V}_a^b = \hat{V}_a - \hat{V}_b$ .

# Les règles de Descartes et de Budan–Fourier

Comment déterminer le nombre de racines de  $P \in \mathbb{R}[X]$  dans  $[a, b]$  ?

# Les règles de Descartes et de Budan–Fourier

Comment déterminer le nombre de racines de  $P \in \mathbb{R}[X]$  dans  $[a, b]$  ?

## Théorème (règle de Descartes)

Pour tout polynôme  $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$  dans  $\mathbb{R}[X]^*$  on a

$$\#_{\text{mult}} \{ x \in \mathbb{R}_{>0} \mid P(x) = 0 \} \leq \hat{V}(c_0, c_1, \dots, c_n).$$

# Les règles de Descartes et de Budan–Fourier

Comment déterminer le nombre de racines de  $P \in \mathbb{R}[X]$  dans  $[a, b]$  ?

## Théorème (règle de Descartes)

Pour tout polynôme  $P = c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n$  dans  $\mathbb{R}[X]^*$  on a

$$\#_{\text{mult}} \{ x \in \mathbb{R}_{>0} \mid P(x) = 0 \} \leq \hat{V}(c_0, c_1, \dots, c_n).$$

Pour les racines négatives on passe de  $P(X)$  à  $P(-X)$ .

# Les règles de Descartes et de Budan–Fourier

Comment déterminer le nombre de racines de  $P \in \mathbb{R}[X]$  dans  $[a, b]$  ?

## Théorème (règle de Descartes)

Pour tout polynôme  $P = c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n$  dans  $\mathbb{R}[X]^*$  on a

$$\#_{\text{mult}} \{ x \in \mathbb{R}_{>0} \mid P(x) = 0 \} \leq \hat{V}(c_0, c_1, \dots, c_n).$$

Pour les racines négatives on passe de  $P(X)$  à  $P(-X)$ .

## Théorème (règle de Budan–Fourier)

Pour tout polynôme  $P = c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n$  dans  $\mathbb{R}[X]^*$  on a

$$\#_{\text{mult}} \{ x \in ]a, b] \mid P(x) = 0 \} \leq \hat{V}_a^b(P, P', \dots, P^{(n)}).$$

# Les règles de Descartes et de Budan–Fourier

Comment déterminer le nombre de racines de  $P \in \mathbb{R}[X]$  dans  $[a, b]$  ?

## Théorème (règle de Descartes)

Pour tout polynôme  $P = c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n$  dans  $\mathbb{R}[X]^*$  on a

$$\#_{\text{mult}} \{ x \in \mathbb{R}_{>0} \mid P(x) = 0 \} \leq \hat{V}(c_0, c_1, \dots, c_n).$$

Pour les racines négatives on passe de  $P(X)$  à  $P(-X)$ .

## Théorème (règle de Budan–Fourier)

Pour tout polynôme  $P = c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n$  dans  $\mathbb{R}[X]^*$  on a

$$\#_{\text{mult}} \{ x \in ]a, b] \mid P(x) = 0 \} \leq \hat{V}_a^b(P, P', \dots, P^{(n)}).$$

On a égalité pour tout intervalle  $]a, b] \subset \mathbb{R}$  ssi  $P$  a  $n$  racines dans  $\mathbb{R}$ .

# Le théorème de Sturm : énoncé

## Théorème (Sturm 1829)

*Pour tout polynôme réel  $P \in \mathbb{R}[X]^*$  et tout intervalle  $[a, b]$  nous avons*

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_n).$$

# Le théorème de Sturm : énoncé

## Théorème (Sturm 1829)

*Pour tout polynôme réel  $P \in \mathbb{R}[X]^*$  et tout intervalle  $[a, b]$  nous avons*

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_n).$$

*D'éventuelles racines sur le bord  $\{a, b\}$  comptent pour un demi.*



# Le théorème de Sturm : énoncé

## Théorème (Sturm 1829)

Pour tout polynôme réel  $P \in \mathbb{R}[X]^*$  et tout intervalle  $[a, b]$  nous avons

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_n).$$

*D'éventuelles racines sur le bord  $\{a, b\}$  comptent pour un demi.*

Ici la suite  $S_0, S_1, \dots, S_n$  est construite de  $S_0 = P$  et  $S_1 = P'$  par division euclidienne  $S_{k+1} = -(S_{k-1} \text{ rem } S_k)$  jusqu'à ce que  $S_{n+1} = 0$ .

# Le théorème de Sturm : énoncé

## Théorème (Sturm 1829)

Pour tout polynôme réel  $P \in \mathbb{R}[X]^*$  et tout intervalle  $[a, b]$  nous avons

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_n).$$

*D'éventuelles racines sur le bord  $\{a, b\}$  comptent pour un demi.*

Ici la suite  $S_0, S_1, \dots, S_n$  est construite de  $S_0 = P$  et  $S_1 = P'$  par division euclidienne  $S_{k+1} = -(S_{k-1} \text{ rem } S_k)$  jusqu'à ce que  $S_{n+1} = 0$ .

Ainsi  $S_n \sim \text{pgcd}(P, P')$  comme dans l'algorithme d'Euclide (ici signé).  
Si  $S_n$  n'est pas constant, il faut encore diviser  $S_0, S_1, \dots, S_n$  par  $S_n$ .



# Le théorème de Sturm : exemples

Algorithme de Sturm :  $S_0 := P$ ,  $S_1 := P'$ ,  $S_{k+1} = -(S_{k-1} \text{ rem } S_k)$ .

# Le théorème de Sturm : exemples

Algorithme de Sturm :  $S_0 := P$ ,  $S_1 := P'$ ,  $S_{k+1} = -(S_{k-1} \text{ rem } S_k)$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 1 = S_0$	-44	-15	-2	+1	0	+1	+10

# Le théorème de Sturm : exemples

Algorithme de Sturm :  $S_0 := P$ ,  $S_1 := P'$ ,  $S_{k+1} = -(S_{k-1} \text{ rem } S_k)$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 1 = S_0$	-44	-15	-2	+1	0	+1	+10
$3X^2 - 4X = S_1$	+39	+20	+7	0	-1	+4	+15

# Le théorème de Sturm : exemples

Algorithme de Sturm :  $S_0 := P$ ,  $S_1 := P'$ ,  $S_{k+1} = -(S_{k-1} \text{ rem } S_k)$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 1 = S_0$	-44	-15	-2	+1	0	+1	+10
$3X^2 - 4X = S_1$	+39	+20	+7	0	-1	+4	+15
$\frac{8}{9}X - 1 = S_2$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{25}{9}$	$-\frac{17}{9}$	-1	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{7}{9}$	$+\frac{5}{3}$





# Le théorème de Sturm : exemples

Algorithme de Sturm :  $S_0 := P$ ,  $S_1 := P'$ ,  $S_{k+1} = -(S_{k-1} \text{ rem } S_k)$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 1 = S_0$	-44	-15	-2	+1	0	+1	+10
$3X^2 - 4X = S_1$	+39	+20	+7	0	-1	+4	+15
$\frac{8}{9}X - 1 = S_2$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{25}{9}$	$-\frac{17}{9}$	-1	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{7}{9}$	$+\frac{5}{3}$
$\frac{45}{64} = S_3$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$
$V$	3	3	3	2	$\frac{3}{2}$	0	0

# Le théorème de Sturm : exemples

Algorithme de Sturm :  $S_0 := P$ ,  $S_1 := P'$ ,  $S_{k+1} = -(S_{k-1} \text{ rem } S_k)$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 1 = S_0$	-44	-15	-2	+1	0	+1	+10
$3X^2 - 4X = S_1$	+39	+20	+7	0	-1	+4	+15
$\frac{8}{9}X - 1 = S_2$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{25}{9}$	$-\frac{17}{9}$	-1	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{7}{9}$	$+\frac{5}{3}$
$\frac{45}{64} = S_3$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$
$V$	3	3	3	2	$\frac{3}{2}$	0	0

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 2 = S_0$	-43	-14	-1	+2	+1	+2	+11

# Le théorème de Sturm : exemples

Algorithme de Sturm :  $S_0 := P$ ,  $S_1 := P'$ ,  $S_{k+1} = -(S_{k-1} \text{ rem } S_k)$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 1 = S_0$	-44	-15	-2	+1	0	+1	+10
$3X^2 - 4X = S_1$	+39	+20	+7	0	-1	+4	+15
$\frac{8}{9}X - 1 = S_2$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{25}{9}$	$-\frac{17}{9}$	-1	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{7}{9}$	$+\frac{5}{3}$
$\frac{45}{64} = S_3$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$
$V$	3	3	3	2	$\frac{3}{2}$	0	0

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 2 = S_0$	-43	-14	-1	+2	+1	+2	+11
$3X^2 - 4X = S_1$	+39	+20	+7	0	-1	+4	+15

# Le théorème de Sturm : exemples

Algorithme de Sturm :  $S_0 := P$ ,  $S_1 := P'$ ,  $S_{k+1} = -(S_{k-1} \text{ rem } S_k)$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 1 = S_0$	-44	-15	-2	+1	0	+1	+10
$3X^2 - 4X = S_1$	+39	+20	+7	0	-1	+4	+15
$\frac{8}{9}X - 1 = S_2$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{25}{9}$	$-\frac{17}{9}$	-1	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{7}{9}$	$+\frac{5}{3}$
$\frac{45}{64} = S_3$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$
$V$	3	3	3	2	$\frac{3}{2}$	0	0

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 2 = S_0$	-43	-14	-1	+2	+1	+2	+11
$3X^2 - 4X = S_1$	+39	+20	+7	0	-1	+4	+15
$\frac{8}{9}X - 2 = S_2$	$-\frac{14}{3}$	$-\frac{34}{9}$	$-\frac{26}{9}$	-2	$-\frac{10}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$+\frac{2}{3}$



# Le théorème de Sturm : exemples

Algorithme de Sturm :  $S_0 := P$ ,  $S_1 := P'$ ,  $S_{k+1} = -(S_{k-1} \text{ rem } S_k)$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 1 = S_0$	-44	-15	-2	+1	0	+1	+10
$3X^2 - 4X = S_1$	+39	+20	+7	0	-1	+4	+15
$\frac{8}{9}X - 1 = S_2$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{25}{9}$	$-\frac{17}{9}$	-1	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{7}{9}$	$+\frac{5}{3}$
$\frac{45}{64} = S_3$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$	$+\frac{45}{64}$
$V$	3	3	3	2	$\frac{3}{2}$	0	0

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 2 = S_0$	-43	-14	-1	+2	+1	+2	+11
$3X^2 - 4X = S_1$	+39	+20	+7	0	-1	+4	+15
$\frac{8}{9}X - 2 = S_2$	$-\frac{14}{3}$	$-\frac{34}{9}$	$-\frac{26}{9}$	-2	$-\frac{10}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$+\frac{2}{3}$
$-\frac{99}{16} = S_3$	$-\frac{99}{16}$	$-\frac{99}{16}$	$-\frac{99}{16}$	$-\frac{99}{16}$	$-\frac{99}{16}$	$-\frac{99}{16}$	$-\frac{99}{16}$
$V$	2	2	2	1	1	1	1

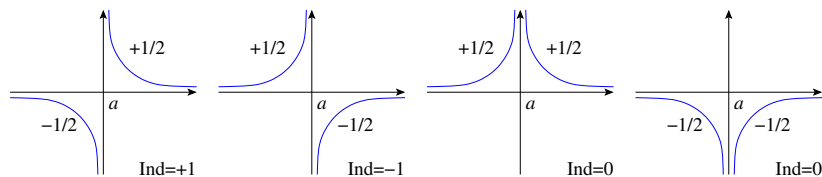
# Pôles d'une fonction rationnelle

Soit  $f = \frac{Q}{P} \in \mathbb{R}(X)^*$  une fraction rationnelle où  $\text{pgcd}(Q, P) = 1$ .

# Pôles d'une fonction rationnelle

Soit  $f = \frac{Q}{P} \in \mathbb{R}(X)^*$  une fraction rationnelle où  $\text{pgcd}(Q, P) = 1$ .

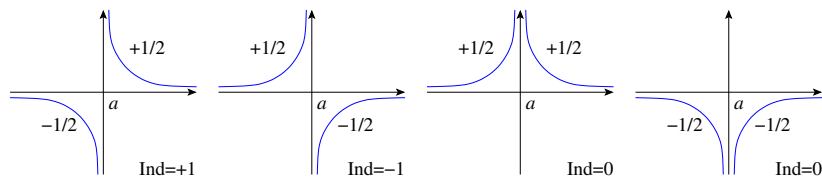
On compte les pôles de  $f$  selon la convention suivante :





# Pôles d'une fonction rationnelle

Soit  $f = \frac{Q}{P} \in \mathbb{R}(X)^*$  une fraction rationnelle où  $\text{pgcd}(Q, P) = 1$ .  
On compte les pôles de  $f$  selon la convention suivante :



## Définition (indice de Cauchy en un point)

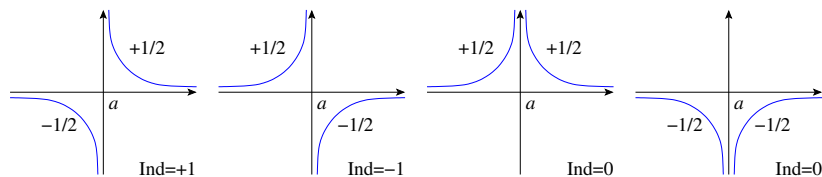
Pour  $f \in \mathbb{R}(X)^*$  et  $a \in \mathbb{R}$  on pose

$$\text{Ind}_a(f) := \text{Ind}_a^+(f) - \text{Ind}_a^-(f) \quad \text{où}$$

$$\text{Ind}_a^\varepsilon(f) := \begin{cases} +\frac{1}{2} & \text{si } \lim_a^\varepsilon f = +\infty, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } \lim_a^\varepsilon f = -\infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Pôles d'une fonction rationnelle

Soit  $f = \frac{Q}{P} \in \mathbb{R}(X)^*$  une fraction rationnelle où  $\text{pgcd}(Q, P) = 1$ .  
On compte les pôles de  $f$  selon la convention suivante :



## Définition (indice de Cauchy en un point)

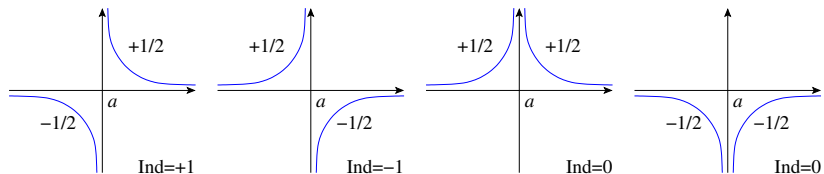
Pour  $f \in \mathbb{R}(X)^*$  et  $a \in \mathbb{R}$  on pose

$$\text{Ind}_a(f) := \text{Ind}_a^+(f) - \text{Ind}_a^-(f) \quad \text{où}$$

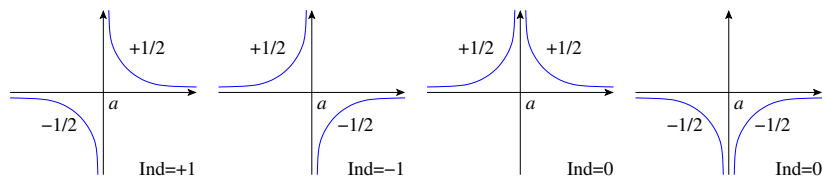
$$\text{Ind}_a^\varepsilon(f) := \begin{cases} +\frac{1}{2} & \text{si } \lim_a^\varepsilon f = +\infty, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } \lim_a^\varepsilon f = -\infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, on a  $\text{Ind}_0\left(\frac{1}{x}\right) = 1$  et  $\text{Ind}_0\left(-\frac{1}{x}\right) = -1$  et  $\text{Ind}_0\left(\frac{\pm 1}{x^2}\right) = 0$ .

# L'indice de Cauchy : définition



# L'indice de Cauchy : définition

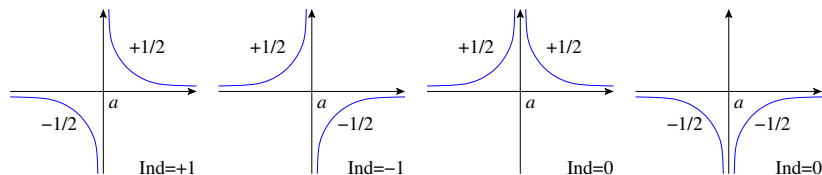


## Définition (indice de Cauchy sur un intervalle)

Pour  $a < b$  dans  $\mathbb{R}$  nous posons

$$\text{Ind}_a^b(f) := \sum_{x \in ]a, b[} \text{Ind}_x(f) + \text{Ind}_a^+(f) - \text{Ind}_b^-(f).$$

# L'indice de Cauchy : définition



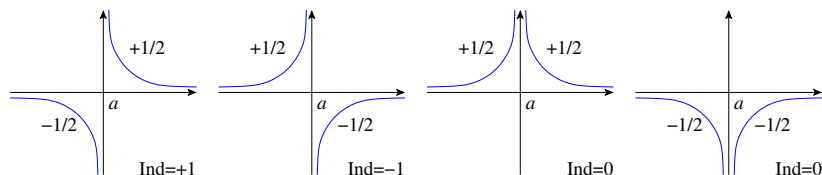
## Définition (indice de Cauchy sur un intervalle)

Pour  $a < b$  dans  $\mathbb{R}$  nous posons

$$\text{Ind}_a^b(f) := \sum_{x \in ]a, b[} \text{Ind}_x(f) + \text{Ind}_a^+(f) - \text{Ind}_b^-(f).$$

Pour  $b < a$  on pose  $\text{Ind}_a^b(f) := -\text{Ind}_b^a(f)$ , et finalement  $\text{Ind}_a^a(f) := 0$ .

# L'indice de Cauchy : définition



## Définition (indice de Cauchy sur un intervalle)

Pour  $a < b$  dans  $\mathbb{R}$  nous posons

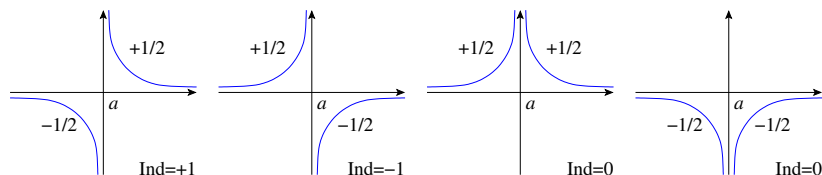
$$\text{Ind}_a^b(f) := \sum_{x \in ]a, b[} \text{Ind}_x(f) + \text{Ind}_a^+(f) - \text{Ind}_b^-(f).$$

Pour  $b < a$  on pose  $\text{Ind}_a^b(f) := -\text{Ind}_b^a(f)$ , et finalement  $\text{Ind}_a^a(f) := 0$ .

## Remarque

L'indice de Cauchy jouit des propriétés semblables à l'intégrale :

# L'indice de Cauchy : définition



## Définition (indice de Cauchy sur un intervalle)

Pour  $a < b$  dans  $\mathbb{R}$  nous posons

$$\text{Ind}_a^b(f) := \sum_{x \in ]a, b[} \text{Ind}_x(f) + \text{Ind}_a^+(f) - \text{Ind}_b^-(f).$$

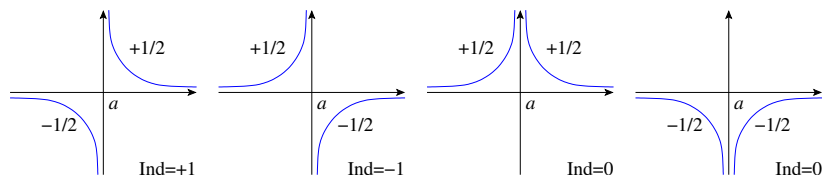
Pour  $b < a$  on pose  $\text{Ind}_a^b(f) := -\text{Ind}_b^a(f)$ , et finalement  $\text{Ind}_a^a(f) := 0$ .

## Remarque

L'indice de Cauchy jouit des propriétés semblables à l'intégrale :

1  $\text{Ind}_a^b(f) + \text{Ind}_b^c(f) = \text{Ind}_a^c(f)$  pour tout  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

# L'indice de Cauchy : définition



## Définition (indice de Cauchy sur un intervalle)

Pour  $a < b$  dans  $\mathbb{R}$  nous posons

$$\text{Ind}_a^b(f) := \sum_{x \in ]a, b[} \text{Ind}_x(f) + \text{Ind}_a^+(f) - \text{Ind}_b^-(f).$$

Pour  $b < a$  on pose  $\text{Ind}_a^b(f) := -\text{Ind}_b^a(f)$ , et finalement  $\text{Ind}_a^a(f) := 0$ .

## Remarque

L'indice de Cauchy jouit des propriétés semblables à l'intégrale :

- 1  $\text{Ind}_a^b(f) + \text{Ind}_b^c(f) = \text{Ind}_a^c(f)$  pour tout  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
- 2  $\text{Ind}_a^b(f \circ \tau) = \text{Ind}_{\tau(a)}^{\tau(b)}(f)$  pour toute fonction affine  $\tau(x) = px + q$ .



# L'indice de Cauchy compte les racines réelles

## Proposition (dérivée logarithmique)

Pour  $f \in \mathbb{R}(X)^*$  on a  $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{si } a \text{ est une racine de } f, \\ -1 & \text{si } a \text{ est un pôle de } f, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

# L'indice de Cauchy compte les racines réelles

## Proposition (dérivée logarithmique)

Pour  $f \in \mathbb{R}(X)^*$  on a  $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{si } a \text{ est une racine de } f, \\ -1 & \text{si } a \text{ est un pôle de } f, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**Démonstration.** On factorise  $f = (X - a)^m g$  tel que  $g(a) \in \mathbb{R}^*$ .

# L'indice de Cauchy compte les racines réelles

## Proposition (dérivée logarithmique)

Pour  $f \in \mathbb{R}(X)^*$  on a  $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{si } a \text{ est une racine de } f, \\ -1 & \text{si } a \text{ est un pôle de } f, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**Démonstration.** On factorise  $f = (X - a)^m g$  tel que  $g(a) \in \mathbb{R}^*$ .

On obtient  $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$ .

# L'indice de Cauchy compte les racines réelles

## Proposition (dérivée logarithmique)

$$\text{Pour } f \in \mathbb{R}(X)^* \text{ on a } \text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{si } a \text{ est une racine de } f, \\ -1 & \text{si } a \text{ est un pôle de } f, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Démonstration.** On factorise  $f = (X - a)^m g$  tel que  $g(a) \in \mathbb{R}^*$ .

On obtient  $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$ . Ainsi  $\text{Ind}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = \text{sign}(m)$ . □

# L'indice de Cauchy compte les racines réelles

## Proposition (dérivée logarithmique)

Pour  $f \in \mathbb{R}(X)^*$  on a  $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{si } a \text{ est une racine de } f, \\ -1 & \text{si } a \text{ est un pôle de } f, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**Démonstration.** On factorise  $f = (X - a)^m g$  tel que  $g(a) \in \mathbb{R}^*$ .

On obtient  $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$ . Ainsi  $\text{Ind}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = \text{sign}(m)$ . □

## Corollaire (racines réelles de polynômes réels)

L'indice  $\text{Ind}_a^b(P'/P)$  compte les racines de  $P \in \mathbb{R}[X]^*$  dans  $[a, b]$  :

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = \text{Ind}_a^b(P'/P).$$

# L'indice de Cauchy compte les racines réelles

## Proposition (dérivée logarithmique)

Pour  $f \in \mathbb{R}(X)^*$  on a  $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{si } a \text{ est une racine de } f, \\ -1 & \text{si } a \text{ est un pôle de } f, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**Démonstration.** On factorise  $f = (X - a)^m g$  tel que  $g(a) \in \mathbb{R}^*$ .

On obtient  $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$ . Ainsi  $\text{Ind}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = \text{sign}(m)$ .  $\square$

## Corollaire (racines réelles de polynômes réels)

L'indice  $\text{Ind}_a^b(P'/P)$  compte les racines de  $P \in \mathbb{R}[X]^*$  dans  $[a, b]$  :

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = \text{Ind}_a^b(P'/P).$$

D'éventuelles racines sur le bord  $\{a, b\}$  comptent pour un demi.

# L'indice de Cauchy compte les racines réelles

## Proposition (dérivée logarithmique)

Pour  $f \in \mathbb{R}(X)^*$  on a  $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{si } a \text{ est une racine de } f, \\ -1 & \text{si } a \text{ est un pôle de } f, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**Démonstration.** On factorise  $f = (X - a)^m g$  tel que  $g(a) \in \mathbb{R}^*$ .

On obtient  $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$ . Ainsi  $\text{Ind}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = \text{sign}(m)$ .  $\square$

## Corollaire (racines réelles de polynômes réels)

L'indice  $\text{Ind}_a^b(P'/P)$  compte les racines de  $P \in \mathbb{R}[X]^*$  dans  $[a, b]$  :

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = \text{Ind}_a^b(P'/P).$$

D'éventuelles racines sur le bord  $\{a, b\}$  comptent pour un demi.

**Problème :** Comment calculer l'indice sans connaître les pôles ?

# L'indice de Cauchy compte les racines réelles

## Proposition (dérivée logarithmique)

Pour  $f \in \mathbb{R}(X)^*$  on a  $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{si } a \text{ est une racine de } f, \\ -1 & \text{si } a \text{ est un pôle de } f, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**Démonstration.** On factorise  $f = (X - a)^m g$  tel que  $g(a) \in \mathbb{R}^*$ .

On obtient  $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$ . Ainsi  $\text{Ind}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = \text{sign}(m)$ .  $\square$

## Corollaire (racines réelles de polynômes réels)

L'indice  $\text{Ind}_a^b(P'/P)$  compte les racines de  $P \in \mathbb{R}[X]^*$  dans  $[a, b]$  :

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = \text{Ind}_a^b(P'/P).$$

D'éventuelles racines sur le bord  $\{a, b\}$  comptent pour un demi.

**Problème :** Comment calculer l'indice sans connaître les pôles ?

**Solution :** La suite de Sturm permet de calculer  $\text{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right)$ .



# La formule d'inversion de Cauchy

## Formule d'inversion (Cauchy 1837)

Si  $P, Q \in \mathbb{R}[X]^*$  n'ont pas de racine commune en  $a$  ni en  $b$ , alors

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) = V_a^b(P, Q).$$

## Définition (suite de Sturm)

Une suite  $(S_0, \dots, S_n)$  dans  $\mathbb{R}[X]$  est *de Sturm* sur  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  si  $S_k(x) = 0$  pour  $0 < k < n$  et  $x \in [a, b]$  entraîne  $S_{k-1}(x)S_{k+1}(x) < 0$ .

## Définition (suite de Sturm)

Une suite  $(S_0, \dots, S_n)$  dans  $\mathbb{R}[X]$  est *de Sturm* sur  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  si  $S_k(x) = 0$  pour  $0 < k < n$  et  $x \in [a, b]$  entraîne  $S_{k-1}(x)S_{k+1}(x) < 0$ .

**Exemple.** Pour  $\frac{R}{S}$  où  $\text{pgcd}(R, S) = 1$  l'algorithme d'Euclide signé produit une suite de Sturm commençant par  $S_0 = S$  et  $S_1 = R$  puis

$$S_{k+1} = S_k Q_k - S_{k-1} \quad \text{jusqu'à} \quad S_n = \text{const.}$$

## Définition (suite de Sturm)

Une suite  $(S_0, \dots, S_n)$  dans  $\mathbb{R}[X]$  est *de Sturm* sur  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  si  $S_k(x) = 0$  pour  $0 < k < n$  et  $x \in [a, b]$  entraîne  $S_{k-1}(x)S_{k+1}(x) < 0$ .

**Exemple.** Pour  $\frac{R}{S}$  où  $\text{pgcd}(R, S) = 1$  l'algorithme d'Euclide signé produit une suite de Sturm commençant par  $S_0 = S$  et  $S_1 = R$  puis

$$S_{k+1} = S_k Q_k - S_{k-1} \quad \text{jusqu'à} \quad S_n = \text{const.}$$

**Exemple.** On peut assouplir l'hypothèse : il suffit que

$$a_k S_{k+1} = S_k Q_k - b_k S_{k-1}$$

avec des constantes réelles  $a_k, b_k > 0$ .

## Définition (suite de Sturm)

Une suite  $(S_0, \dots, S_n)$  dans  $\mathbb{R}[X]$  est *de Sturm* sur  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  si  $S_k(x) = 0$  pour  $0 < k < n$  et  $x \in [a, b]$  entraîne  $S_{k-1}(x)S_{k+1}(x) < 0$ .

**Exemple.** Pour  $\frac{R}{S}$  où  $\text{pgcd}(R, S) = 1$  l'algorithme d'Euclide signé produit une suite de Sturm commençant par  $S_0 = S$  et  $S_1 = R$  puis

$$S_{k+1} = S_k Q_k - S_{k-1} \quad \text{jusqu'à} \quad S_n = \text{const.}$$

**Exemple.** On peut assouplir l'hypothèse : il suffit que

$$a_k S_{k+1} = S_k Q_k - b_k S_{k-1}$$

avec des constantes réelles  $a_k, b_k > 0$ .

**Exemple.** Plus généralement encore, il suffit que

$$A_k S_{k+1} = S_k Q_k - B_k S_{k-1}$$

avec des polynômes réels  $A_k, B_k$  vérifiant  $A_k(x) > 0$  et  $B_k(x) > 0$ , puis  $S_n(x) \neq 0$  pour tout  $x$  dans l'intervalle  $[a, b]$  en question.

# Le théorème de Sturm

## Corollaire (de la formule d'inversion)

*Si  $(S_0, S_1, \dots, S_n)$  est une suite de Sturm sur  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , alors*

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_n).$$

# Le théorème de Sturm

## Corollaire (de la formule d'inversion)

*Si  $(S_0, S_1, \dots, S_n)$  est une suite de Sturm sur  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , alors*

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_n).$$

**Démonstration.** La formule d'inversion est télescopique :

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_0}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_2}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_2}\right) = V_a^b(S_0, S_1, S_2).$$

Les termes au milieu s'annulent : si  $S_1(x) = 0$ , alors  $S_0(x)S_2(x) < 0$ .

# Le théorème de Sturm

## Corollaire (de la formule d'inversion)

*Si  $(S_0, S_1, \dots, S_n)$  est une suite de Sturm sur  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , alors*

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_n).$$

**Démonstration.** La formule d'inversion est télescopique :

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_0}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_2}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_2}\right) = V_a^b(S_0, S_1, S_2).$$

Les termes au milieu s'annulent : si  $S_1(x) = 0$ , alors  $S_0(x)S_2(x) < 0$ .

## Théorème (fraction continue selon l'algorithme d'Euclide)

*Pour  $R/S$  où  $\text{pgcd}(R, S) = 1$  l'algorithme d'Euclide signé produit une suite de Sturm  $S_0 = S, S_1 = R, \dots, S_n = 1, S_{n+1} = 0$ . Ainsi*

$$\text{Ind}_a^b(R/S) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_n).$$



# Le théorème de Sturm

## Corollaire (de la formule d'inversion)

*Si  $(S_0, S_1, \dots, S_n)$  est une suite de Sturm sur  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , alors*

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_n).$$

**Démonstration.** La formule d'inversion est télescopique :

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_0}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_2}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_2}\right) = V_a^b(S_0, S_1, S_2).$$

Les termes au milieu s'annulent : si  $S_1(x) = 0$ , alors  $S_0(x)S_2(x) < 0$ .

## Théorème (fraction continue selon l'algorithme d'Euclide)

*Pour  $R/S$  où  $\text{pgcd}(R, S) = 1$  l'algorithme d'Euclide signé produit une suite de Sturm  $S_0 = S, S_1 = R, \dots, S_n = 1, S_{n+1} = 0$ . Ainsi*

$$\text{Ind}_a^b(R/S) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_n).$$

◆ Cette formule permet de calculer l'indice de Cauchy  $\text{Ind}_a^b(R/S)$ .

# L'indice de Cauchy compte le nombre de tours

Soient  $R, S \in \mathbb{R}[X]$  deux polynômes réels et  $F = R + iS$ .

# L'indice de Cauchy compte le nombre de tours

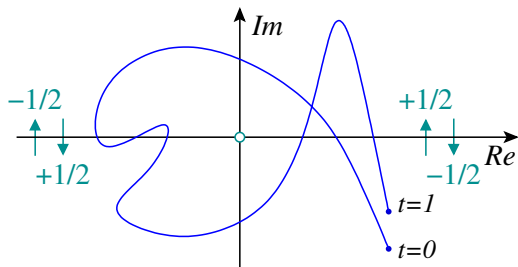
Soient  $R, S \in \mathbb{R}[X]$  deux polynômes réels et  $F = R + iS$ .

L'application  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto F(t)$ , décrit un chemin dans le plan complexe, allant de  $F(0)$  vers  $F(1)$ , à coordonnées  $R(t) + iS(t)$ .

# L'indice de Cauchy compte le nombre de tours

Soient  $R, S \in \mathbb{R}[X]$  deux polynômes réels et  $F = R + iS$ .

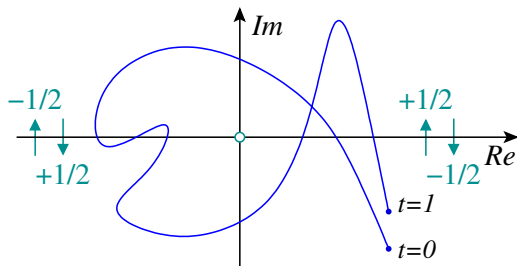
L'application  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto F(t)$ , décrit un chemin dans le plan complexe, allant de  $F(0)$  vers  $F(1)$ , à coordonnées  $R(t) + iS(t)$ .



# L'indice de Cauchy compte le nombre de tours

Soient  $R, S \in \mathbb{R}[X]$  deux polynômes réels et  $F = R + iS$ .

L'application  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto F(t)$ , décrit un chemin dans le plan complexe, allant de  $F(0)$  vers  $F(1)$ , à coordonnées  $R(t) + iS(t)$ .

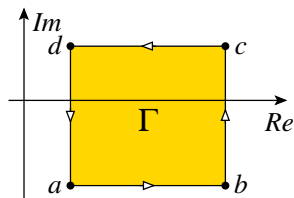


## Observation

L'indice  $\frac{1}{2} \text{Ind}_0^1\left(\frac{R}{S}\right)$  compte le nombre de tours autour de 0 : traverser l'axe réel compte  $\pm \frac{1}{2}$  selon le sens gauche / droite.

# Indice de Cauchy d'un polynôme complexe

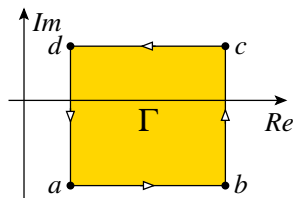
Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme complexe.  
Comment localiser ses racines ?



# Indice de Cauchy d'un polynôme complexe

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme complexe.  
Comment localiser ses racines ?

**Objectif** : établir une méthode effective  
analogue au théorème de Sturm réel.

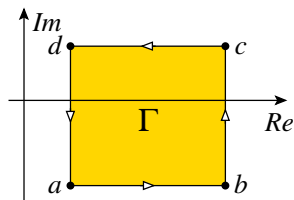


# Indice de Cauchy d'un polynôme complexe

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme complexe.  
Comment localiser ses racines ?

**Objectif** : établir une méthode effective  
analogue au théorème de Sturm réel.

Au lieu d'un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$   
on considère un rectangle  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ .





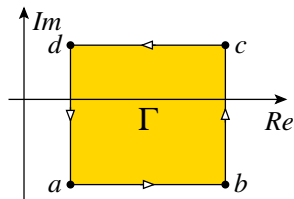
# Indice de Cauchy d'un polynôme complexe

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme complexe.  
Comment localiser ses racines ?

**Objectif** : établir une méthode effective  
analogue au théorème de Sturm réel.

Au lieu d'un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$   
on considère un rectangle  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ .

**Calcul d'indice** : On considère le chemin rectiligne de  $a$  vers  $b$ .



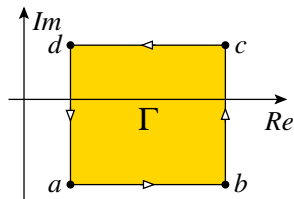
# Indice de Cauchy d'un polynôme complexe

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme complexe.  
Comment localiser ses racines ?

**Objectif** : établir une méthode effective  
analogue au théorème de Sturm réel.

Au lieu d'un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$   
on considère un rectangle  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ .

**Calcul d'indice** : On considère le chemin rectiligne de  $a$  vers  $b$ .  
Par changement de variable on pose  $F = P(a + (b - a)X)$ .



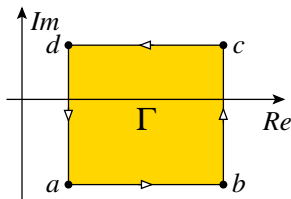
# Indice de Cauchy d'un polynôme complexe

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme complexe.  
Comment localiser ses racines ?

**Objectif** : établir une méthode effective  
analogue au théorème de Sturm réel.

Au lieu d'un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$   
on considère un rectangle  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ .

**Calcul d'indice** : On considère le chemin rectiligne de  $a$  vers  $b$ .  
Par changement de variable on pose  $F = P(a + (b - a)X)$ .  
Les parties  $R = \operatorname{Re} F$  et  $S = \operatorname{Im} F$  sont des polynômes réels.



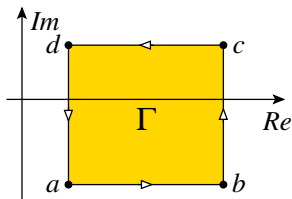
# Indice de Cauchy d'un polynôme complexe

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme complexe.  
Comment localiser ses racines ?

**Objectif** : établir une méthode effective  
analogue au théorème de Sturm réel.

Au lieu d'un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$   
on considère un rectangle  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ .

**Calcul d'indice** : On considère le chemin rectiligne de  $a$  vers  $b$ .  
Par changement de variable on pose  $F = P(a + (b - a)X)$ .  
Les parties  $R = \operatorname{Re} F$  et  $S = \operatorname{Im} F$  sont des polynômes réels.  
L'application  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto F(t)$  décrit un chemin allant de  
 $F(0) = P(a)$  vers  $F(1) = P(b)$ , à coordonnées  $R(t) + iS(t)$ .

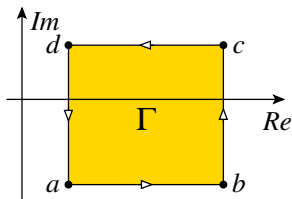


# Indice de Cauchy d'un polynôme complexe

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme complexe.  
Comment localiser ses racines ?

**Objectif** : établir une méthode effective  
analogue au théorème de Sturm réel.

Au lieu d'un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$   
on considère un rectangle  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ .



**Calcul d'indice** : On considère le chemin rectiligne de  $a$  vers  $b$ .  
Par changement de variable on pose  $F = P(a + (b - a)X)$ .  
Les parties  $R = \operatorname{Re} F$  et  $S = \operatorname{Im} F$  sont des polynômes réels.  
L'application  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto F(t)$  décrit un chemin allant de  
 $F(0) = P(a)$  vers  $F(1) = P(b)$ , à coordonnées  $R(t) + iS(t)$ .

## Définition

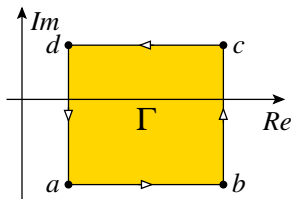
On pose  $\operatorname{ind}_a^b(P) := \frac{1}{2} \operatorname{Ind}_0^1\left(\frac{R}{S}\right)$ .

# Indice de Cauchy d'un polynôme complexe

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme complexe.  
Comment localiser ses racines ?

**Objectif** : établir une méthode effective  
analogue au théorème de Sturm réel.

Au lieu d'un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$   
on considère un rectangle  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ .



**Calcul d'indice** : On considère le chemin rectiligne de  $a$  vers  $b$ .  
Par changement de variable on pose  $F = P(a + (b - a)X)$ .  
Les parties  $R = \operatorname{Re} F$  et  $S = \operatorname{Im} F$  sont des polynômes réels.  
L'application  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto F(t)$  décrit un chemin allant de  
 $F(0) = P(a)$  vers  $F(1) = P(b)$ , à coordonnées  $R(t) + iS(t)$ .

## Définition

On pose  $\operatorname{ind}_a^b(P) := \frac{1}{2} \operatorname{Ind}_0^1\left(\frac{R}{S}\right)$ . Pour le rectangle  $\Gamma$  on pose  
 $\operatorname{ind}_{\partial\Gamma}(P) := \operatorname{ind}_a^b(P) + \operatorname{ind}_b^c(P) + \operatorname{ind}_c^d(P) + \operatorname{ind}_d^a(P)$ .

# L'indice de Cauchy compte les racines complexes

## Proposition (exercice)

Pour  $P = X - r$  on a  $\text{ind}_{\partial\Gamma}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \text{ est à l'intérieur de } \Gamma, \\ \frac{1}{2} & \text{si } r \text{ est sur un côté de } \Gamma, \\ \frac{1}{4} & \text{si } r \text{ est un sommet de } \Gamma, \\ 0 & \text{si } r \text{ est à l'extérieur de } \Gamma. \end{cases}$

# L'indice de Cauchy compte les racines complexes

## Proposition (exercice)

Pour  $P = X - r$  on a  $\text{ind}_{\partial\Gamma}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \text{ est à l'intérieur de } \Gamma, \\ \frac{1}{2} & \text{si } r \text{ est sur un côté de } \Gamma, \\ \frac{1}{4} & \text{si } r \text{ est un sommet de } \Gamma, \\ 0 & \text{si } r \text{ est à l'extérieur de } \Gamma. \end{cases}$

## Théorème (admis)

Si  $P, Q \in \mathbb{C}[X]$  n'ont pas de racines sur les sommets de  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ , alors

$$\text{ind}_{\partial\Gamma}(P \cdot Q) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(P) + \text{ind}_{\partial\Gamma}(Q).$$



# L'indice de Cauchy compte les racines complexes

## Proposition (exercice)

Pour  $P = X - r$  on a  $\text{ind}_{\partial\Gamma}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \text{ est à l'intérieur de } \Gamma, \\ \frac{1}{2} & \text{si } r \text{ est sur un coté de } \Gamma, \\ \frac{1}{4} & \text{si } r \text{ est un sommet de } \Gamma, \\ 0 & \text{si } r \text{ est à l'extérieur de } \Gamma. \end{cases}$

## Théorème (admis)

Si  $P, Q \in \mathbb{C}[X]$  n'ont pas de racines sur les sommets de  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ , alors

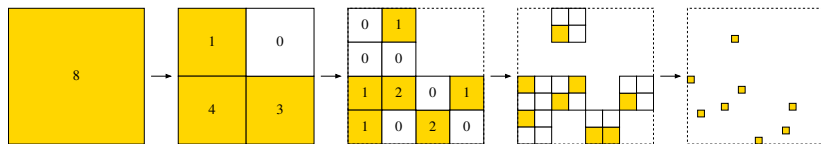
$$\text{ind}_{\partial\Gamma}(P \cdot Q) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(P) + \text{ind}_{\partial\Gamma}(Q).$$

## Corollaire

Si  $P \in \mathbb{C}[X]$  n'admet pas de racine sur les sommets de  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ , alors  $\text{ind}_{\partial\Gamma}(P)$  compte le nombre des racines de  $P$  dans  $\Gamma$ .

# Localisation des racines complexes

Par dichotomie, l'indice de Cauchy permet de localiser toutes les racines complexes d'un polynôme complexe donné  $P \in \mathbb{C}[X]$ .



- 1 Équations polynomiales et existence des racines
  - Équations polynomiales : degré  $\leq 4$  vs degré  $\geq 5$
  - Racines rationnelles : recherche exhaustive
  - Localisation grossière des racines : la borne de Cauchy
  
- 2 Localisation effective des racines réelles et complexes
  - Les règles de Descartes et de Budan–Fourier
  - Racines réelles : indice de Cauchy et suites de Sturm
  - Racines complexes : localisation dans le plan complexe