Mathématiques assistées par ordinateur

Chapitre 6 : Méthodes itératives

Michael Eisermann

Mat249, DLST L2S4, Année 2008-2009
www-fourier.ujf-grenoble.fr/˜eiserm/cours # mao
Document mis à jour le 6 juillet 2009

INSTITUT FOURIER
UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
SCIENCES.TECHNOLOGIE.SANTÉ
GRENOBLE 1

Sommaire

Sommaire

Convergence d’une suite numérique (rappel)

La notion de convergence sera fondamentale dans toute la suite.

Convergence d'une suite numérique (rappel)

La notion de convergence sera fondamentale dans toute la suite.

Définition (convergence)

Une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est une application $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$.

Convergence d'une suite numérique (rappel)

La notion de convergence sera fondamentale dans toute la suite.

Définition (convergence)

Une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est une application $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ *converge* vers $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Convergence d'une suite numérique (rappel)

La notion de convergence sera fondamentale dans toute la suite.

Définition (convergence)

Une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est une application $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ *converge* vers $\ell\in\mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$ on ait $|u_n-\ell|\leq\varepsilon$.

Exemple

Pour $|k|<1$ la suite géométrique k^n converge vers 0.

Convergence d'une suite numérique (rappel)

La notion de convergence sera fondamentale dans toute la suite.

Définition (convergence)

Une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est une application $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ *converge* vers $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Exemple

Pour $|k| < 1$ la suite géométrique k^n converge vers 0.

Exemple

Soit $u_0 = 0$ puis $u_{n+1} = \frac{9+u_n}{10}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence d'une suite numérique (rappel)

La notion de convergence sera fondamentale dans toute la suite.

Définition (convergence)

Une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est une application $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ *converge* vers $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Exemple

Pour $|k| < 1$ la suite géométrique k^n converge vers 0.

Exemple

Soit $u_0 = 0$ puis $u_{n+1} = \frac{9+u_n}{10}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0.9, \quad u_2 = 0.99, \quad u_3 = 0.999, \quad u_4 = 0.9999, \quad \dots$$

Convergence d'une suite numérique (rappel)

La notion de convergence sera fondamentale dans toute la suite.

Définition (convergence)

Une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est une application $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ *converge* vers $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Exemple

Pour $|k| < 1$ la suite géométrique k^n converge vers 0.

Exemple

Soit $u_0 = 0$ puis $u_{n+1} = \frac{9+u_n}{10}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0.9, \quad u_2 = 0.99, \quad u_3 = 0.999, \quad u_4 = 0.9999, \quad \dots$$

Cette suite converge vers 1, car $|u_n - 1| = (\frac{1}{10})^n \to 0$. (Exercice)

Convergence d'une suite numérique (rappel)

La notion de convergence sera fondamentale dans toute la suite.

Définition (convergence)

Une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est une application $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ *converge* vers $\ell\in\mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$ on ait $|u_n-\ell|\leq\varepsilon$.

Exemple

Pour $|k|<1$ la suite géométrique k^n converge vers 0.

Exemple

Soit $u_0=0$ puis $u_{n+1}=\frac{9+u_n}{10}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$$u_0=0,\quad u_1=0.9,\quad u_2=0.99,\quad u_3=0.999,\quad u_4=0.9999,\quad\ldots$$

Cette suite converge vers 1, car $|u_n-1|=(\frac{1}{10})^n\to 0$. (Exercice)

Ici on *itère* la fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par $f(x)=\frac{9+x}{10}$.

Convergence d'une suite numérique (rappel)

La notion de convergence sera fondamentale dans toute la suite.

Définition (convergence)

Une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est une application $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ *converge* vers $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Exemple

Pour $|k| < 1$ la suite géométrique k^n converge vers 0.

Exemple

Soit $u_0 = 0$ puis $u_{n+1} = \frac{9+u_n}{10}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0.9, \quad u_2 = 0.99, \quad u_3 = 0.999, \quad u_4 = 0.9999, \quad \dots$$

Cette suite converge vers 1, car $|u_n - 1| = (\frac{1}{10})^n \to 0$. (Exercice)

Ici on *itère* la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{9+x}{10}$.
La limite 1 est un *point fixe* car $f(1) = 1$ et il s'avère *attractif*.

Suites itératives

Définition (suite itérative)

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.

Suites itératives

Définition (suite itérative)

On considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
Ceci définit la suite itérative $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Suites itératives

Définition (suite itérative)

On considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
Ceci définit la suite itérative $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Écriture alternative : $u_n = f^n(u_0)$ où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n termes).

Suites itératives

Définition (suite itérative)

On considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
Ceci définit la suite itérative $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Écriture alternative : $u_n = f^n(u_0)$ où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n termes).

Questions importantes :

Suites itératives

Définition (suite itérative)

On considère une fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
Ceci définit la suite itérative $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Écriture alternative : $u_n = f^n(u_0)$ où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n termes).

Questions importantes :

1. Quel est le comportement de la suite u_n ?

Suites itératives

Définition (suite itérative)

On considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
Ceci définit la suite itérative $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Écriture alternative : $u_n = f^n(u_0)$ où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n termes).

Questions importantes :

1. Quel est le comportement de la suite u_n ?
   Converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite ?

Suites itératives

Définition (suite itérative)

On considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
Ceci définit la suite itérative $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Écriture alternative : $u_n = f^n(u_0)$ où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n termes).

Questions importantes :

1. Quel est le comportement de la suite u_n ?
   Converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite ?
2. Stabilité : une petite variation des données initiales mène-t-elle à une petite variation des résultats ? Ou est-ce chaotique ?

Suites itératives

Définition (suite itérative)

On considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
Ceci définit la suite itérative $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Écriture alternative : $u_n = f^n(u_0)$ où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n termes).

Questions importantes :

1. Quel est le comportement de la suite u_n ?
   Converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite ?
2. Stabilité : une petite variation des données initiales mène-t-elle à une petite variation des résultats ? Ou est-ce chaotique ?
3. Si la suite u_n converge, converge-t-elle rapidement ?

Suites itératives

Définition (suite itérative)

On considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
Ceci définit la suite itérative $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Écriture alternative : $u_n = f^n(u_0)$ où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n termes).

Questions importantes :

1. Quel est le comportement de la suite u_n ?
   Converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite ?
2. Stabilité : une petite variation des données initiales mène-t-elle à une petite variation des résultats ? Ou est-ce chaotique ?
3. Si la suite u_n converge, converge-t-elle rapidement ?
   Combien d'itérations faut-il pour une précision donnée ?

Suites itératives

Définition (suite itérative)

On considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
Ceci définit la suite itérative $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Écriture alternative : $u_n = f^n(u_0)$ où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n termes).

Questions importantes :

1. Quel est le comportement de la suite u_n ?
   Converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite ?
2. Stabilité : une petite variation des données initiales mène-t-elle à une petite variation des résultats ? Ou est-ce chaotique ?
3. Si la suite u_n converge, converge-t-elle rapidement ?
   Combien d'itérations faut-il pour une précision donnée ?

Observation (limites et points fixes)

Si f est continue et u_n converge vers ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.

Suites itératives

Définition (suite itérative)

On considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
Ceci définit la suite itérative $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Écriture alternative : $u_n = f^n(u_0)$ où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n termes).

Questions importantes :

1. Quel est le comportement de la suite u_n ?
   Converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite ?
2. Stabilité : une petite variation des données initiales mène-t-elle à une petite variation des résultats ? Ou est-ce chaotique ?
3. Si la suite u_n converge, converge-t-elle rapidement ?
   Combien d'itérations faut-il pour une précision donnée ?

Observation (limites et points fixes)

Si f est continue et u_n converge vers ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.

Démonstration. $f(\ell) = f(\lim u_n) = \lim f(u_n) = \lim u_{n+1} = \ell$. $\square$

Convergence linéaire

Exemple (convergence linéaire à la Banach)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{2x+2}{x+2}$, à partir de $u_0 = 2$.

Convergence linéaire

Exemple (convergence linéaire à la Banach)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{2x+2}{x+2}$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ?

Convergence linéaire

Exemple (convergence linéaire à la Banach)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{2x+2}{x+2}$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ? $\quad f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2 = x^2 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2$.

Convergence linéaire

Exemple (convergence linéaire à la Banach)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{2x+2}{x+2}$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ? $\qquad f(x) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x + 2 = x^2 + 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = 2$.
D'après notre observation : si u_n converge, alors la limite est $\sqrt{2}$.

Convergence linéaire

Exemple (convergence linéaire à la Banach)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{2x+2}{x+2}$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ? $\quad f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2 = x^2 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2$.
D'après notre observation : si u_n converge, alors la limite est $\sqrt{2}$.

Calcul des premiers termes :

$$\begin{aligned}
u_1 &= \tfrac{3}{2} && = \underline{1}.50000000000 \\
u_2 &= \tfrac{10}{7} && = \underline{1.4}2857142857\dots \\
u_3 &= \tfrac{17}{12} && = \underline{1.41}666666666\dots \\
u_4 &= \tfrac{58}{41} && = \underline{1.414}63414634\dots \\
u_5 &= \tfrac{99}{70} && = \underline{1.4142}8571428\dots \\
&\dots && \dots \\
u_{10} &= \tfrac{11482}{8119} && = \underline{1.41421357}310\dots \\
u_{11} &= \tfrac{19601}{13860} && = \underline{1.414213564}21\dots
\end{aligned}$$

Convergence linéaire

Exemple (convergence linéaire à la Banach)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{2x+2}{x+2}$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ? $\quad f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2 = x^2 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2$.
D'après notre observation : si u_n converge, alors la limite est $\sqrt{2}$.

Calcul des premiers termes :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \tfrac{3}{2} && = \underline{1}.50000000000 \\
u_2 &= \tfrac{10}{7} && = \underline{1.4}2857142857\ldots \\
u_3 &= \tfrac{17}{12} && = \underline{1.41}666666666\ldots \\
u_4 &= \tfrac{58}{41} && = \underline{1.414}63414634\ldots \\
u_5 &= \tfrac{99}{70} && = \underline{1.4142}8571428\ldots \\
&\ldots && \ldots \\
u_{10} &= \tfrac{11482}{8119} && = \underline{1.41421357}310\ldots \\
u_{11} &= \tfrac{19601}{13860} && = \underline{1.41421356}421\ldots
\end{aligned}
$$

Empiriquement, le nombre de décimales valables croît linéairement avec le nombre d'itérations.

Convergence linéaire

Exemple (convergence linéaire à la Banach)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{2x+2}{x+2}$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ? $\quad f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2 = x^2 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2$.
D'après notre observation : si u_n converge, alors la limite est $\sqrt{2}$.

Calcul des premiers termes :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \tfrac{3}{2} && = \underline{1}.50000000000 \\
u_2 &= \tfrac{10}{7} && = \underline{1.4}2857142857\ldots \\
u_3 &= \tfrac{17}{12} && = \underline{1.41}666666666\ldots \\
u_4 &= \tfrac{58}{41} && = \underline{1.414}63414634\ldots \\
u_5 &= \tfrac{99}{70} && = \underline{1.4142}8571428\ldots \\
&\ldots && \ldots \\
u_{10} &= \tfrac{11482}{8119} && = \underline{1.41421357}310\ldots \\
u_{11} &= \tfrac{19601}{13860} && = \underline{1.41421356}421\ldots
\end{aligned}
$$

Empiriquement, le nombre de décimales valables croît linéairement avec le nombre d'itérations. Il nous faudra encore une preuve !

Convergence quadratique

Exemple (convergence quadratique à la Newton)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, à partir de $u_0 = 2$.

Convergence quadratique

Exemple (convergence quadratique à la Newton)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ?

Convergence quadratique

Exemple (convergence quadratique à la Newton)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ? $f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{2}{x} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2$

Convergence quadratique

Exemple (convergence quadratique à la Newton)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ? $\quad f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{2}{x} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2$

D'après notre observation : si u_n converge, alors la limite est $\sqrt{2}$.

Convergence quadratique

Exemple (convergence quadratique à la Newton)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ? $\quad f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{2}{x} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2$

D'après notre observation : si u_n converge, alors la limite est $\sqrt{2}$.

Calcul des premiers termes :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \tfrac{3}{2} &&= \underline{1}.5000000000000000000000000000000000000000 \\
u_2 &= \tfrac{17}{12} &&= \underline{1.41}66666666666666666666666666666666666666\ldots \\
u_3 &= \tfrac{577}{408} &&= \underline{1.41421}56862745098039215686274509803921568\ldots \\
u_4 &= \tfrac{665857}{470832} &&= \underline{1.414213562374}6899106262955788901349101165\ldots \\
u_5 &= \tfrac{886731088897}{627013566048} &&= \underline{1.414213562373095048801689}6235025302436149\ldots \\
u_6 &= \ldots &&= \underline{1.4142135623730950488016887242096980785696\ldots}
\end{aligned}
$$

Convergence quadratique

Exemple (convergence quadratique à la Newton)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ? $\quad f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{2}{x} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2$

D'après notre observation : si u_n converge, alors la limite est $\sqrt{2}$.

Calcul des premiers termes :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \tfrac{3}{2} && = \underline{1}.5000000000000000000000000000000000000000 \\
u_2 &= \tfrac{17}{12} && = \underline{1.41}66666666666666666666666666666666666666\ldots \\
u_3 &= \tfrac{577}{408} && = \underline{1.41421}56862745098039215686274509803921568\ldots \\
u_4 &= \tfrac{665857}{470832} && = \underline{1.41421356237}46899106262955788901349101165\ldots \\
u_5 &= \tfrac{886731088897}{627013566048} && = \underline{1.41421356237309504880168}9623502530243614 9\ldots \\
u_6 &= \ldots && = \underline{1.4142135623730950488016887242096980785696\ldots}
\end{aligned}
$$

Après n itérations on a environ 2^n chiffres valables !

Convergence quadratique

Exemple (convergence quadratique à la Newton)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ? $\quad f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{2}{x} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2$

D'après notre observation : si u_n converge, alors la limite est $\sqrt{2}$.

Calcul des premiers termes :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \tfrac{3}{2} &&= \underline{1}.500000000000000000000000000000000000000 \\
u_2 &= \tfrac{17}{12} &&= \underline{1.41}666666666666666666666666666666666666\ldots \\
u_3 &= \tfrac{577}{408} &&= \underline{1.41421}568627450980392156862745098039 21568\ldots \\
u_4 &= \tfrac{665857}{470832} &&= \underline{1.41421356237}4689910626295578890134910 1165\ldots \\
u_5 &= \tfrac{886731088897}{627013566048} &&= \underline{1.414213562373095048801 68}96235025302436149\ldots \\
u_6 &= \ldots &&= \underline{1.4142135623730950488016887242096980785696\ldots}
\end{aligned}
$$

Après n itérations on a environ 2^n chiffres valables !
Empiriquement, le nombre de décimales valables double
à chaque itération.

Convergence quadratique

Exemple (convergence quadratique à la Newton)

On itère $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ? $\qquad f(x) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad x + \frac{2}{x} = 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = 2$

D'après notre observation : si u_n converge, alors la limite est $\sqrt{2}$.

Calcul des premiers termes :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \tfrac{3}{2} && = \underline{1}.5000000000000000000000000000000000000000 \\
u_2 &= \tfrac{17}{12} && = \underline{1.41}66666666666666666666666666666666666666\ldots \\
u_3 &= \tfrac{577}{408} && = \underline{1.41421}56862745098039215686274509803921568\ldots \\
u_4 &= \tfrac{665857}{470832} && = \underline{1.41421356237}46899106262955788901349101165\ldots \\
u_5 &= \tfrac{886731088897}{627013566048} && = \underline{1.41421356237309504880168}9623502530243614 9\ldots \\
u_6 &= \ldots && = \underline{1.4142135623730950488016887242096980785696\ldots}
\end{aligned}
$$

Après n itérations on a environ 2^n chiffres valables !
Empiriquement, le nombre de décimales valables double
à chaque itération. Il nous faudra encore une preuve !

Approximation de racines d'après Newton–Héron

Proposition (rappel)

Pour tout $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *il existe un unique* $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *tel que* $r^n = a$.
Ainsi on définit la racine n*ième* $\sqrt[n]{a} := r$.

Approximation de racines d'après Newton–Héron

Proposition (rappel)

Pour tout $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *il existe un unique* $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *tel que* $r^n = a$. *Ainsi on définit la racine* n*ième* $\sqrt[n]{a} := r$.

Question : Comment approcher $\sqrt[n]{a}$ efficacement ?

Approximation de racines d'après Newton–Héron

Proposition (rappel)

Pour tout $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *il existe un unique* $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *tel que* $r^n = a$. *Ainsi on définit la racine* n*ième* $\sqrt[n]{a} := r$.

Question : Comment approcher $\sqrt[n]{a}$ efficacement ?

Théorème (Newton–Héron, version qualitative)

Pour toute valeur initiale $u_0 > 0$ *la suite itérative*

$$u_{k+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1)u_k + \frac{a}{u_k^{n-1}}\right]$$

converge vers la racine $r := \sqrt[n]{a}$.

Approximation de racines d'après Newton–Héron

Proposition (rappel)

Pour tout $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *il existe un unique* $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *tel que* $r^n = a$*.*
Ainsi on définit la racine n*ième* $\sqrt[n]{a} := r$*.*

Question : Comment approcher $\sqrt[n]{a}$ efficacement ?

Théorème (Newton–Héron, version qualitative)

Pour toute valeur initiale $u_0 > 0$ *la suite itérative*

$$u_{k+1} = \tfrac{1}{n}\left[(n-1)u_k + \tfrac{a}{u_k^{n-1}}\right]$$

converge vers la racine $r := \sqrt[n]{a}$*.*

Avantage important : la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est facilement calculable !
Les quatre opérations arithmétiques $+$, $-$, $*$, $/$ suffisent.

Approximation de racines d'après Newton–Héron

Proposition (rappel)

Pour tout $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *il existe un unique* $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *tel que* $r^n = a$. *Ainsi on définit la racine* n*ième* $\sqrt[n]{a} := r$.

Question : Comment approcher $\sqrt[n]{a}$ efficacement ?

Théorème (Newton–Héron, version qualitative)

Pour toute valeur initiale $u_0 > 0$ *la suite itérative*

$$u_{k+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1)u_k + \frac{a}{u_k^{n-1}}\right]$$

converge vers la racine $r := \sqrt[n]{a}$.

Avantage important : la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est facilement calculable ! Les quatre opérations arithmétiques $+$, $-$, $*$, $/$ suffisent.

Questions pratiques : Quelle est la vitesse de la convergence ? Comment mesurer la qualité de l'approximation, $|u_k - r|$?

Approximation de racines (suite)

Théorème (Newton–Héron, version quantitative)

Soit $a > 0$ *et* $r := \sqrt[n]{a}$.

Approximation de racines (suite)

Théorème (Newton–Héron, version quantitative)

Soit $a > 0$ *et* $r := \sqrt[n]{a}$. *Pour toute valeur initiale* $u_0 > 0$ *les suites*

$$u_k = \tfrac{1}{n}\left[(n-1)u_{k-1} + \tfrac{a}{u_{k-1}^{n-1}}\right] \quad \textit{et} \quad v_k = a/u_k^{n-1}$$

Approximation de racines (suite)

Théorème (Newton–Héron, version quantitative)

Soit $a > 0$ *et* $r := \sqrt[n]{a}$. *Pour toute valeur initiale* $u_0 > 0$ *les suites*

$$u_k = \frac{1}{n}\left[(n-1)u_{k-1} + \frac{a}{u_{k-1}^{n-1}}\right] \quad \textit{et} \quad v_k = a/u_k^{n-1}$$

donnent des encadrements $v_k \leq r \leq u_k$ *de plus en plus fins :*

$$v_1 \leq v_2 \leq v_3 \leq \dots \quad \leq \quad r \quad \leq \quad \dots \leq u_3 \leq u_2 \leq u_1$$

Approximation de racines (suite)

Théorème (Newton–Héron, version quantitative)

Soit $a > 0$ *et* $r := \sqrt[n]{a}$. *Pour toute valeur initiale* $u_0 > 0$ *les suites*

$$u_k = \frac{1}{n}\left[(n-1)u_{k-1} + \frac{a}{u_{k-1}^{n-1}}\right] \quad \textit{et} \quad v_k = a/u_k^{n-1}$$

donnent des encadrements $v_k \le r \le u_k$ *de plus en plus fins :*

$$v_1 \le v_2 \le v_3 \le \dots \quad \le \quad r \quad \le \quad \dots \le u_3 \le u_2 \le u_1$$

En particulier $|u_k - v_k|$ *permet de majorer l'erreur d'approximation.*

Approximation de racines (suite)

Théorème (Newton–Héron, version quantitative)

Soit $a > 0$ *et* $r := \sqrt[n]{a}$*. Pour toute valeur initiale* $u_0 > 0$ *les suites*

$$u_k = \frac{1}{n}\left[(n-1)u_{k-1} + \frac{a}{u_{k-1}^{n-1}}\right] \quad \text{et} \quad v_k = a/u_k^{n-1}$$

donnent des encadrements $v_k \le r \le u_k$ *de plus en plus fins :*

$$v_1 \le v_2 \le v_3 \le \dots \quad \le \quad r \quad \le \quad \dots \le u_3 \le u_2 \le u_1$$

En particulier $|u_k - v_k|$ *permet de majorer l'erreur d'approximation.*

Quant à la vitesse de convergence, l'erreur relative $\varepsilon_k = \frac{u_k - r}{r}$ *vérifie*

$$\varepsilon_{k+1} \le \min\left\{ \tfrac{n-1}{n}\varepsilon_k \ , \ \tfrac{n-1}{2}\varepsilon_k^2 \right\}.$$

Approximation de racines (suite)

Théorème (Newton–Héron, version quantitative)

Soit $a > 0$ *et* $r := \sqrt[n]{a}$*. Pour toute valeur initiale* $u_0 > 0$ *les suites*

$$u_k = \frac{1}{n}\left[(n-1)u_{k-1} + \frac{a}{u_{k-1}^{n-1}}\right] \quad \textit{et} \quad v_k = a/u_k^{n-1}$$

donnent des encadrements $v_k \le r \le u_k$ *de plus en plus fins :*

$$v_1 \le v_2 \le v_3 \le \dots \quad \le \quad r \quad \le \quad \dots \le u_3 \le u_2 \le u_1$$

En particulier $|u_k - v_k|$ *permet de majorer l'erreur d'approximation.*

Quant à la vitesse de convergence, l'erreur relative $\varepsilon_k = \frac{u_k - r}{r}$ *vérifie*

$$\varepsilon_{k+1} \le \min\left\{ \tfrac{n-1}{n}\varepsilon_k \,,\; \tfrac{n-1}{2}\varepsilon_k^2 \right\}.$$

$\Rightarrow$ Initialement, pour u_k loin de r, la progression est au moins linéaire : $\varepsilon_{k+1} \le \frac{n-1}{n}\varepsilon_k$ avec un rapport de contraction $\frac{n-1}{n} < 1$.

Approximation de racines (suite)

Théorème (Newton–Héron, version quantitative)

Soit $a > 0$ *et* $r := \sqrt[n]{a}$*. Pour toute valeur initiale* $u_0 > 0$ *les suites*

$$u_k = \frac{1}{n}\left[(n-1)u_{k-1} + \frac{a}{u_{k-1}^{n-1}}\right] \quad \textit{et} \quad v_k = a/u_k^{n-1}$$

donnent des encadrements $v_k \le r \le u_k$ *de plus en plus fins :*

$$v_1 \le v_2 \le v_3 \le \dots \quad \le \quad r \quad \le \quad \dots \le u_3 \le u_2 \le u_1$$

En particulier $|u_k - v_k|$ *permet de majorer l'erreur d'approximation.*

Quant à la vitesse de convergence, l'erreur relative $\varepsilon_k = \frac{u_k - r}{r}$ *vérifie*

$$\varepsilon_{k+1} \le \min\left\{ \tfrac{n-1}{n}\varepsilon_k \,,\ \tfrac{n-1}{2}\varepsilon_k^2 \right\}.$$

- $\Rightarrow$ Initialement, pour u_k loin de r, la progression est au moins linéaire : $\varepsilon_{k+1} \le \frac{n-1}{n}\varepsilon_k$ avec un rapport de contraction $\frac{n-1}{n} < 1$.
- $\Rightarrow$ Finalement, pour u_k proche de r, la convergence est quadratique : $\varepsilon_{k+1} \le \frac{n-1}{2}\varepsilon_k^2$.

Exemples numériques

Approximation de $r = \sqrt{2}$ à partir de $u_0 = 1$:

$$\underline{1}.3333333333 \leq r \leq \underline{1}.5000000000$$

$$\underline{1.41}17647058 \leq r \leq \underline{1.41}66666667$$

$$\underline{1.41421}14384 \leq r \leq \underline{1.41421}56863$$

$$\underline{1.4142135623} \leq r \leq \underline{1.4142135624}$$

Exemples numériques

Approximation de $r = \sqrt{2}$ à partir de $u_0 = 1$:

$$\underline{1}.3333333333 \leq r \leq \underline{1}.5000000000$$
$$\underline{1.41}17647058 \leq r \leq \underline{1.41}66666667$$
$$\underline{1.41421}14384 \leq r \leq \underline{1.41421}56863$$
$$\underline{1.4142135623} \leq r \leq \underline{1.4142135624}$$

Approximation de $r = \sqrt[3]{10}$ à partir de $u_0 = 1$:

$$0.6250000000000000 \leq r \leq 4.0000000000000000$$
$$1.2098298676748582 \leq r \leq 2.8750000000000000$$
$$1.8579980870834728 \leq r \leq 2.3199432892249528$$
$$\underline{2.1}315646651045386 \leq r \leq \underline{2.1}659615551777928$$
$$\underline{2.154}3122250101293 \leq r \leq \underline{2.154}4959251533748$$
$$\underline{2.1544346}865510652 \leq r \leq \underline{2.1544346}917722930$$
$$\underline{2.1544346900318837} \leq r \leq \underline{2.1544346900318838}$$

Exemples numériques

Approximation de $r = \sqrt{2}$ à partir de $u_0 = 1$:

$$
\begin{aligned}
\underline{1}.3333333333 &\leq r \leq \underline{1}.5000000000\\
\underline{1.41}17647058 &\leq r \leq \underline{1.41}66666667\\
\underline{1.4142}114384 &\leq r \leq \underline{1.4142}156863\\
\underline{1.4142135623} &\leq r \leq \underline{1.4142135624}
\end{aligned}
$$

Approximation de $r = \sqrt[3]{10}$ à partir de $u_0 = 1$:

$$
\begin{aligned}
0.6250000000000000 &\leq r \leq 4.0000000000000000\\
1.2098298676748582 &\leq r \leq 2.8750000000000000\\
1.8579980870834728 &\leq r \leq 2.3199432892249528\\
\underline{2.1}315646651045386 &\leq r \leq \underline{2.1}659615551777928\\
\underline{2.154}3122250101293 &\leq r \leq \underline{2.154}4959251533748\\
\underline{2.1544346}865510652 &\leq r \leq \underline{2.1544346}917722930\\
\underline{2.1544346900318837} &\leq r \leq \underline{2.1544346900318838}
\end{aligned}
$$

- Peu d'itérations suffisent pour garantir une précision satisfaisante.

L'effet papillon : instabilité numérique

La récurrence de Fibonacci est définie par $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.

L'effet papillon : instabilité numérique

La récurrence de Fibonacci est définie par $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.

Exemple stable

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	1.00	1.00	2.00	3.00	5.00	8.00	13.00	21.00	34.00	55.00	89.00
x'_n	1.00	1.01	2.01	3.02	5.03	8.05	13.08	21.13	34.21	55.34	89.55

L'effet papillon : instabilité numérique

La récurrence de Fibonacci est définie par $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.

Exemple stable

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	1.00	1.00	2.00	3.00	5.00	8.00	13.00	21.00	34.00	55.00	89.00
x'_n	1.00	1.01	2.01	3.02	5.03	8.05	13.08	21.13	34.21	55.34	89.55

Définition (stabilité numérique, formulation heuristique)

Un calcul est *stable* si des petits changements des données initiales n'entraînent que des petits changements des résultats finaux.

L'effet papillon : instabilité numérique

La récurrence de Fibonacci est définie par $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.

Exemple stable

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	1.00	1.00	2.00	3.00	5.00	8.00	13.00	21.00	34.00	55.00	89.00
x'_n	1.00	1.01	2.01	3.02	5.03	8.05	13.08	21.13	34.21	55.34	89.55

Définition (stabilité numérique, formulation heuristique)

Un calcul est *stable* si des petits changements des données initiales n'entraînent que des petits changements des résultats finaux.

Exemple instable

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	1.000	-0.618	0.382	-0.236	0.146	-0.090	0.056
x'_n	1.000	-0.619	0.381	-0.238	0.143	-0.095	0.048

n	7	8	9	10	...	20	...	30	...
x_n	-0.034	0.022	-0.012	0.010		0.230		28.280	
x'_n	-0.047	0.001	-0.046	-0.045		-6.535		-803.760	

L'effet papillon : instabilité numérique

La récurrence de Fibonacci est définie par $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.

Exemple stable

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	1.00	1.00	2.00	3.00	5.00	8.00	13.00	21.00	34.00	55.00	89.00
x'_n	1.00	1.01	2.01	3.02	5.03	8.05	13.08	21.13	34.21	55.34	89.55

Définition (stabilité numérique, formulation heuristique)

Un calcul est *stable* si des petits changements des données initiales n'entraînent que des petits changements des résultats finaux.

Exemple instable

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	1.000	-0.618	0.382	-0.236	0.146	-0.090	0.056
x'_n	1.000	-0.619	0.381	-0.238	0.143	-0.095	0.048

n	7	8	9	10	...	20	...	30	...
x_n	-0.034	0.022	-0.012	0.010		0.230		28.280	
x'_n	-0.047	0.001	-0.046	-0.045		-6.535		-803.760	

Avertissement (calcul instable)

Des petites erreurs peuvent se propager, s'amplifier, et finalement entraîner une erreur considérable au cours de quelques itérations.

Dynamique locale autour d'un point fixe

Exemple (cas linéaire)

On considère une fonction linéaire $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx$ avec une constante $k \in \mathbb{R}$. Évidemment elle admet $a = 0$ pour point fixe.

Dynamique locale autour d'un point fixe

Exemple (cas linéaire)

On considère une fonction linéaire $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx$ avec une constante $k \in \mathbb{R}$. Évidemment elle admet $a = 0$ pour point fixe.

Deux phénomènes peuvent se produire :

- Si $|k| < 1$, par exemple $k = \frac{1}{2}$, alors

$$|f^n(u_0) - a| = |k|^n \cdot |u_0 - a| \to 0.$$

Dynamique locale autour d’un point fixe

Exemple (cas linéaire)

On considère une fonction linéaire $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx$ avec une constante $k \in \mathbb{R}$. Évidemment elle admet $a = 0$ pour point fixe.

Deux phénomènes peuvent se produire :

- Si $|k| < 1$, par exemple $k = \frac{1}{2}$, alors

$$|f^n(u_0) - a| = |k|^n \cdot |u_0 - a| \to 0.$$

  On dit que a est un point fixe *attractif* ou *stable*.

Dynamique locale autour d'un point fixe

Exemple (cas linéaire)

On considère une fonction linéaire $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx$ avec une constante $k \in \mathbb{R}$. Évidemment elle admet $a = 0$ pour point fixe.

Deux phénomènes peuvent se produire :

- Si $|k| < 1$, par exemple $k = \frac{1}{2}$, alors
  $$|f^n(u_0) - a| = |k|^n \cdot |u_0 - a| \to 0.$$
  On dit que a est un point fixe *attractif* ou *stable*.
- Si $|k| > 1$, par exemple $k = 2$, alors
  $$|f^n(u_0) - a| = |k|^n \cdot |u_0 - a| \to \infty.$$

Dynamique locale autour d'un point fixe

Exemple (cas linéaire)

On considère une fonction linéaire $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx$ avec une constante $k \in \mathbb{R}$. Évidemment elle admet $a = 0$ pour point fixe.

Deux phénomènes peuvent se produire :

- Si $|k| < 1$, par exemple $k = \frac{1}{2}$, alors

  $$|f^n(u_0) - a| = |k|^n \cdot |u_0 - a| \to 0.$$

  On dit que a est un point fixe *attractif* ou *stable*.

- Si $|k| > 1$, par exemple $k = 2$, alors

  $$|f^n(u_0) - a| = |k|^n \cdot |u_0 - a| \to \infty.$$

  On dit que a est un point fixe *répulsif* ou *instable*.

Dynamique locale autour d'un point fixe

Exemple (cas linéaire)

On considère une fonction linéaire $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx$ avec une constante $k \in \mathbb{R}$. Évidemment elle admet $a = 0$ pour point fixe.

Deux phénomènes peuvent se produire :

- Si $|k| < 1$, par exemple $k = \frac{1}{2}$, alors

$$|f^n(u_0) - a| = |k|^n \cdot |u_0 - a| \to 0.$$

  On dit que a est un point fixe *attractif* ou *stable*.

- Si $|k| > 1$, par exemple $k = 2$, alors

$$|f^n(u_0) - a| = |k|^n \cdot |u_0 - a| \to \infty.$$

  On dit que a est un point fixe *répulsif* ou *instable*.

- Si $|k| = 1$: pour $f = \mathrm{id}$ tous les points sont fixés, pour $f = -\mathrm{id}$ la suite $u_n = (-1)^n u_0$ oscille.

Dynamique locale autour d'un point fixe

Exemple (cas linéaire)

On considère une fonction linéaire $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx$ avec une constante $k \in \mathbb{R}$. Évidemment elle admet $a = 0$ pour point fixe.

Deux phénomènes peuvent se produire :

- Si $|k| < 1$, par exemple $k = \frac{1}{2}$, alors

$$|f^n(u_0) - a| = |k|^n \cdot |u_0 - a| \to 0.$$

  On dit que a est un point fixe *attractif* ou *stable*.

- Si $|k| > 1$, par exemple $k = 2$, alors

$$|f^n(u_0) - a| = |k|^n \cdot |u_0 - a| \to \infty.$$

  On dit que a est un point fixe *répulsif* ou *instable*.

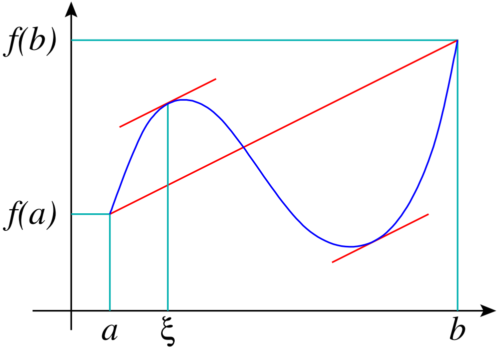
- Si $|k| = 1$: pour $f = \mathrm{id}$ tous les points sont fixés, pour $f = -\mathrm{id}$ la suite $u_n = (-1)^n u_0$ oscille.

Passons maintenant aux fonctions dérivables…

Rappel : le théorème des accroissements finis

Théorème (des accroissements finis, TAF)

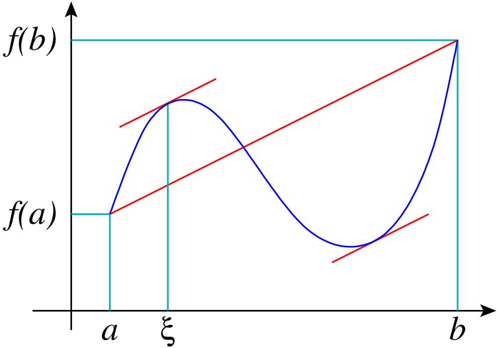
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$*.*
Alors il existe $\xi \in \,]a,b[$ *tel que* $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*.*



Rappel : le théorème des accroissements finis

Théorème (des accroissements finis, TAF)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$*.*
Alors il existe $\xi \in]a,b[$ *tel que* $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*.*

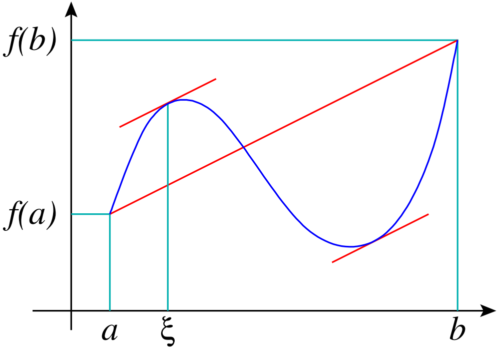


Autrement dit, $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

Rappel : le théorème des accroissements finis

Théorème (des accroissements finis, TAF)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$*.*
Alors il existe $\xi \in\ ]a, b[$ *tel que* $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*.*



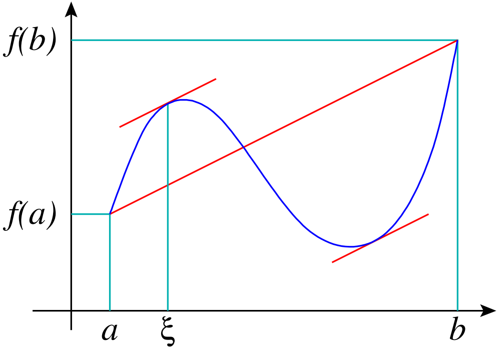
Autrement dit, $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Ou encore $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$.

Rappel : le théorème des accroissements finis

Théorème (des accroissements finis, TAF)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$*.*
Alors il existe $\xi \in]a, b[$ *tel que* $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*.*



Autrement dit, $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Ou encore $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$.

C'est Taylor–Lagrange à l'ordre 0.

Dynamique autour d'un point fixe attractif

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continûment dérivable et soit* $a = f(a)$ *un point fixe.*
Si $|f'(a)| < 1$ *alors* a *est un point fixe attractif.*

Dynamique autour d'un point fixe attractif

Proposition

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continûment dérivable et soit* $a = f(a)$ *un point fixe.*
Si $|f'(a)| < 1$ *alors* a *est un point fixe attractif.*

Démonstration. On peut choisir $k \in \mathbb{R}$ telle que $|f'(a)| < k < 1$.

Dynamique autour d'un point fixe attractif

Proposition

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment dérivable et soit $a = f(a)$ un point fixe. Si $|f'(a)| < 1$ alors a est un point fixe attractif.

Démonstration. On peut choisir $k \in \mathbb{R}$ telle que $|f'(a)| < k < 1$.

La continuité de f' assure l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(\xi)| \leq k$ pour tout ξ dans le voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Dynamique autour d'un point fixe attractif

Proposition

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continûment dérivable et soit* $a = f(a)$ *un point fixe.*
Si $|f'(a)| < 1$ *alors* a *est un point fixe attractif.*

Démonstration. On peut choisir $k \in \mathbb{R}$ telle que $|f'(a)| < k < 1$.

La continuité de f' assure l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(\xi)| \leq k$ pour tout ξ dans le voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

On applique le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in V$ il existe un ξ entre a et x tel que $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$, donc

$$|f(x) - a| = |f(x) - f(a)| = |f'(\xi)(x - a)| \leq k|x - a|.$$

Dynamique autour d'un point fixe attractif

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment dérivable et soit $a = f(a)$ un point fixe. Si $|f'(a)| < 1$ alors a est un point fixe attractif.

Démonstration. On peut choisir $k \in \mathbb{R}$ telle que $|f'(a)| < k < 1$.

La continuité de f' assure l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(\xi)| \leq k$ pour tout ξ dans le voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

On applique le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in V$ il existe un ξ entre a et x tel que $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$, donc

$$|f(x) - a| = |f(x) - f(a)| = |f'(\xi)(x - a)| \leq k|x - a|.$$

Ainsi les images itérées de $x \in V$ convergent vers a :

$$|f^n(x) - a| \leq k^n|x - a| \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Dynamique autour d'un point fixe attractif

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment dérivable et soit $a = f(a)$ un point fixe. Si $|f'(a)| < 1$ alors a est un point fixe attractif.

Démonstration. On peut choisir $k \in \mathbb{R}$ telle que $|f'(a)| < k < 1$.

La continuité de f' assure l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(\xi)| \leq k$ pour tout ξ dans le voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

On applique le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in V$ il existe un ξ entre a et x tel que $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$, donc

$$|f(x) - a| = |f(x) - f(a)| = |f'(\xi)(x - a)| \leq k|x - a|.$$

Ainsi les images itérées de $x \in V$ convergent vers a :

$$|f^n(x) - a| \leq k^n|x - a| \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, a est un point fixe attractif. $\square$

Dynamique autour d'un point fixe répulsif

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continûment dérivable et soit* $a = f(a)$ *un point fixe.*
Si $|f'(a)| > 1$ *alors* a *est un point fixe répulsif.*

Dynamique autour d'un point fixe répulsif

Proposition

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continûment dérivable et soit* $a = f(a)$ *un point fixe.*
Si $|f'(a)| > 1$ *alors* a *est un point fixe répulsif.*

Démonstration. On peut choisir $k \in \mathbb{R}$ telle que $|f'(a)| > k > 1$.

Dynamique autour d'un point fixe répulsif

Proposition

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continûment dérivable et soit* $a = f(a)$ *un point fixe.*
Si $|f'(a)| > 1$ *alors* a *est un point fixe répulsif.*

Démonstration. On peut choisir $k \in \mathbb{R}$ telle que $|f'(a)| > k > 1$.

La continuité de f' assure l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(\xi)| \geq k$ pour tout ξ dans le voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Dynamique autour d'un point fixe répulsif

Proposition

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continûment dérivable et soit* $a = f(a)$ *un point fixe.*
Si $|f'(a)| > 1$ *alors* a *est un point fixe répulsif.*

Démonstration. On peut choisir $k \in \mathbb{R}$ telle que $|f'(a)| > k > 1$.

La continuité de f' assure l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(\xi)| \geq k$ pour tout ξ dans le voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

On applique le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in V$ il existe un ξ entre a et x tel que $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$, donc

$$|f(x) - a| = |f(x) - f(a)| = |f'(\xi)(x - a)| \geq k|x - a|.$$

Dynamique autour d'un point fixe répulsif

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment dérivable et soit $a = f(a)$ un point fixe.
Si $|f'(a)| > 1$ alors a est un point fixe répulsif.

Démonstration. On peut choisir $k \in \mathbb{R}$ telle que $|f'(a)| > k > 1$.

La continuité de f' assure l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(\xi)| \geq k$ pour tout ξ dans le voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

On applique le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in V$ il existe un ξ entre a et x tel que $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$, donc

$$|f(x) - a| = |f(x) - f(a)| = |f'(\xi)(x - a)| \geq k|x - a|.$$

Ainsi les images itérées de $x \in V \setminus \{a\}$ s'éloignent de a :

$$|f^n(x) - a| \geq k^n|x - a|, \qquad \text{puis ils sortent du voisinage } V.$$

Dynamique autour d'un point fixe répulsif

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment dérivable et soit $a = f(a)$ un point fixe.
Si $|f'(a)| > 1$ alors a est un point fixe répulsif.

Démonstration. On peut choisir $k \in \mathbb{R}$ telle que $|f'(a)| > k > 1$.

La continuité de f' assure l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(\xi)| \geq k$ pour tout ξ dans le voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

On applique le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in V$ il existe un ξ entre a et x tel que $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$, donc

$$|f(x) - a| = |f(x) - f(a)| = |f'(\xi)(x - a)| \geq k|x - a|.$$

Ainsi les images itérées de $x \in V \setminus \{a\}$ s'éloignent de a :

$$|f^n(x) - a| \geq k^n|x - a|, \qquad \text{puis ils sortent du voisinage } V.$$

Autrement dit, a est un point fixe répulsif. $\square$

Dynamique autour d'un point fixe douteux

Remarque

Le cas d'un point fixe a avec $|f'(a)| = 1$ est douteux.

Dynamique autour d'un point fixe douteux

Remarque

Le cas d'un point fixe a avec $|f'(a)| = 1$ est douteux.

Dans ce cas une analyse plus fine s'impose. Exemples typiques :

Dynamique autour d'un point fixe douteux

Remarque

Le cas d'un point fixe a avec $|f'(a)| = 1$ est douteux.

Dans ce cas une analyse plus fine s'impose. Exemples typiques :

- Pour $f(x) = x - x^3$ le point fixe 0 est attractif.

Dynamique autour d'un point fixe douteux

Remarque

Le cas d'un point fixe a avec $|f'(a)| = 1$ est douteux.

Dans ce cas une analyse plus fine s'impose. Exemples typiques :

- Pour $f(x) = x - x^3$ le point fixe 0 est attractif.
- Pour $f(x) = x + x^3$ le point fixe 0 est répulsif.

Dynamique autour d'un point fixe douteux

Remarque

Le cas d'un point fixe a avec $|f'(a)| = 1$ est douteux.

Dans ce cas une analyse plus fine s'impose. Exemples typiques :

- Pour $f(x) = x - x^3$ le point fixe 0 est attractif.
- Pour $f(x) = x + x^3$ le point fixe 0 est répulsif.
- Pour $f(x) = x + x^2$ il est attractif à gauche mais répulsif à droite.

Dynamique autour d'un point fixe douteux

Remarque

Le cas d'un point fixe a avec $|f'(a)| = 1$ est douteux.

Dans ce cas une analyse plus fine s'impose. Exemples typiques :

- Pour $f(x) = x - x^3$ le point fixe 0 est attractif.
- Pour $f(x) = x + x^3$ le point fixe 0 est répulsif.
- Pour $f(x) = x + x^2$ il est attractif à gauche mais répulsif à droite.
- Pour $f(x) = x - x^2$ il est attractif à droite mais répulsif à gauche.

Dynamique autour d'un point fixe douteux

Remarque

Le cas d'un point fixe a avec $|f'(a)| = 1$ est douteux.

Dans ce cas une analyse plus fine s'impose. Exemples typiques :

- Pour $f(x) = x - x^3$ le point fixe 0 est attractif.
- Pour $f(x) = x + x^3$ le point fixe 0 est répulsif.
- Pour $f(x) = x + x^2$ il est attractif à gauche mais répulsif à droite.
- Pour $f(x) = x - x^2$ il est attractif à droite mais répulsif à gauche.

Remarque

En dimension ≥ 2 la situation est plus compliquée !

Dynamique autour d'un point fixe douteux

Remarque

Le cas d'un point fixe a avec $|f'(a)| = 1$ est douteux.

Dans ce cas une analyse plus fine s'impose. Exemples typiques :

- Pour $f(x) = x - x^3$ le point fixe 0 est attractif.
- Pour $f(x) = x + x^3$ le point fixe 0 est répulsif.
- Pour $f(x) = x + x^2$ il est attractif à gauche mais répulsif à droite.
- Pour $f(x) = x - x^2$ il est attractif à droite mais répulsif à gauche.

Remarque

En dimension ≥ 2 la situation est plus compliquée !

Reconsidérons le cas d'une application linéaire $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.

Dynamique autour d'un point fixe douteux

Remarque

Le cas d'un point fixe a avec $|f'(a)| = 1$ est douteux.

Dans ce cas une analyse plus fine s'impose. Exemples typiques :

- Pour $f(x) = x - x^3$ le point fixe 0 est attractif.
- Pour $f(x) = x + x^3$ le point fixe 0 est répulsif.
- Pour $f(x) = x + x^2$ il est attractif à gauche mais répulsif à droite.
- Pour $f(x) = x - x^2$ il est attractif à droite mais répulsif à gauche.

Remarque

En dimension ≥ 2 la situation est plus compliquée !

Reconsidérons le cas d'une application linéaire $\binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \binom{x}{y}$.
Si $|\lambda|, |\mu| < 1$, le point fixe 0 est attractif. Si $|\lambda|, |\mu| > 1$, il est répulsif.

Dynamique autour d'un point fixe douteux

Remarque

Le cas d'un point fixe a avec $|f'(a)| = 1$ est douteux.

Dans ce cas une analyse plus fine s'impose. Exemples typiques :

- Pour $f(x) = x - x^3$ le point fixe 0 est attractif.
- Pour $f(x) = x + x^3$ le point fixe 0 est répulsif.
- Pour $f(x) = x + x^2$ il est attractif à gauche mais répulsif à droite.
- Pour $f(x) = x - x^2$ il est attractif à droite mais répulsif à gauche.

Remarque

En dimension ≥ 2 la situation est plus compliquée !

Reconsidérons le cas d'une application linéaire $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.
Si $|\lambda|, |\mu| < 1$, le point fixe 0 est attractif. Si $|\lambda|, |\mu| > 1$, il est répulsif.
Si $|\lambda| < 1 < |\mu|$, il existe une direction stable et une direction instable.

Sommaire

Fonctions contractantes

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Fonctions contractantes

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Définition (fonction contractante)

On dit que $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *contractante* de rapport k où $0 \leq k < 1$
si $|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$ pour tout $x, y \in I$.

Fonctions contractantes

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Définition (fonction contractante)

On dit que $f \colon I \to \mathbb{R}$ est *contractante* de rapport k où $0 \leq k < 1$ si $|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$ pour tout $x, y \in I$.

Autrement dit, la fonction f est contractante si elle rapproche les points, d'un rapport $k < 1$ fixé d'avance.

Fonctions contractantes

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Définition (fonction contractante)

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est *contractante* de rapport k où $0 \le k < 1$
si $|f(x) - f(y)| \le k \cdot |x - y|$ pour tout $x, y \in I$.

Autrement dit, la fonction f est contractante si elle rapproche les points, d'un rapport $k < 1$ fixé d'avance.

Proposition (critère pratique)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable tel que $|f'(\xi)| \le k$ pour tout $\xi \in I$.
Si $k < 1$ alors f est contractante de rapport k.

Fonctions contractantes

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Définition (fonction contractante)

On dit que $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *contractante* de rapport k où $0 \leq k < 1$ si $|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$ pour tout $x, y \in I$.

Autrement dit, la fonction f est contractante si elle rapproche les points, d'un rapport $k < 1$ fixé d'avance.

Proposition (critère pratique)

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable tel que $|f'(\xi)| \leq k$ pour tout $\xi \in I$. Si $k < 1$ alors f est contractante de rapport k.

Démonstration. Soit $x, y \in I$. Par le théorème des accroissements fini on a $f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y)$ pour un ξ entre x et y.
On conclut que $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq k|x - y|$. $\square$

Le théorème du point fixe de Banach

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Le théorème du point fixe de Banach

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f : I \to I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

Le théorème du point fixe de Banach

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f\colon I \to I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

1. *Il existe un et un seul point $a \in I$ vérifiant $f(a) = a$.*

Le théorème du point fixe de Banach

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f\colon I \to I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

1. *Il existe un et un seul point $a \in I$ vérifiant $f(a) = a$.*
2. *Pour tout $u_0 \in I$ la suite itérative $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.*

Le théorème du point fixe de Banach

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f\colon I \to I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

1. *Il existe un et un seul point $a \in I$ vérifiant $f(a) = a$.*
2. *Pour tout $u_0 \in I$ la suite itérative $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.*
3. *On a $|u_n - a| \le k^n |u_0 - a|$, la convergence vers a est donc au moins aussi rapide que celle de la suite géométrique k^n vers 0.*

Le théorème du point fixe de Banach

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f : I \to I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

1. *Il existe un et un seul point $a \in I$ vérifiant $f(a) = a$.*
2. *Pour tout $u_0 \in I$ la suite itérative $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.*
3. *On a $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$, la convergence vers a est donc au moins aussi rapide que celle de la suite géométrique k^n vers 0.*
4. *Pour contrôler l'approximation on a l'estimation de l'écart*

$$\left|u_n - a\right| \ \leq \ \tfrac{k}{1-k} \cdot \left|u_n - u_{n-1}\right|.$$

Le théorème du point fixe de Banach

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f \colon I \to I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

1. *Il existe un et un seul point $a \in I$ vérifiant $f(a) = a$.*
2. *Pour tout $u_0 \in I$ la suite itérative $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.*
3. *On a $|u_n - a| \le k^n |u_0 - a|$, la convergence vers a est donc au moins aussi rapide que celle de la suite géométrique k^n vers 0.*
4. *Pour contrôler l'approximation on a l'estimation de l'écart*

$$\big|u_n - a\big| \;\le\; \tfrac{k}{1-k} \cdot \big|u_n - u_{n-1}\big|.$$

On ignore souvent la limite a mais on peut facilement calculer la suite itérative u_n : c'est elle qui permet d'approcher la valeur cherchée a.

Le théorème du point fixe de Banach

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f\colon I \to I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

1. *Il existe un et un seul point $a \in I$ vérifiant $f(a) = a$.*
2. *Pour tout $u_0 \in I$ la suite itérative $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.*
3. *On a $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$, la convergence vers a est donc au moins aussi rapide que celle de la suite géométrique k^n vers 0.*
4. *Pour contrôler l'approximation on a l'estimation de l'écart*

$$\left|u_n - a\right| \;\leq\; \tfrac{k}{1-k} \cdot \left|u_n - u_{n-1}\right|.$$

On ignore souvent la limite a mais on peut facilement calculer la suite itérative u_n : c'est elle qui permet d'approcher la valeur cherchée a.

Pour contrôler la qualité de l'approximation u_n, on majore l'écart $|u_n - a|$ entre u_n et la limite inconnue par la quantité $\frac{k}{1-k}|u_n - u_{n-1}|$.

Le théorème du point fixe de Banach

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f\colon I \to I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

1. *Il existe un et un seul point $a \in I$ vérifiant $f(a) = a$.*
2. *Pour tout $u_0 \in I$ la suite itérative $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.*
3. *On a $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$, la convergence vers a est donc au moins aussi rapide que celle de la suite géométrique k^n vers 0.*
4. *Pour contrôler l'approximation on a l'estimation de l'écart*

$$\left|u_n - a\right| \;\leq\; \tfrac{k}{1-k} \cdot \left|u_n - u_{n-1}\right|.$$

On ignore souvent la limite a mais on peut facilement calculer la suite itérative u_n : c'est elle qui permet d'approcher la valeur cherchée a.

Pour contrôler la qualité de l'approximation u_n, on majore l'écart $|u_n - a|$ entre u_n et la limite inconnue par la quantité $\frac{k}{1-k}|u_n - u_{n-1}|$.

◈ Tout est parfaitement explicite et immédiatement calculable.

Exemple d'application (1/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Exemple d'application (1/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Pour appliquer le théorème du point fixe, il faut d'abord trouver un intervalle I sur lequel $f(x) = \cos(x)$ satisfasse aux hypothèses :

Exemple d'application (1/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Pour appliquer le théorème du point fixe, il faut d'abord trouver un intervalle I sur lequel $f(x) = \cos(x)$ satisfasse aux hypothèses :

$$f(I) \subset I \quad \text{et} \quad f|_I : I \to I \quad \text{est contractante.}$$

Exemple d'application (1/3)

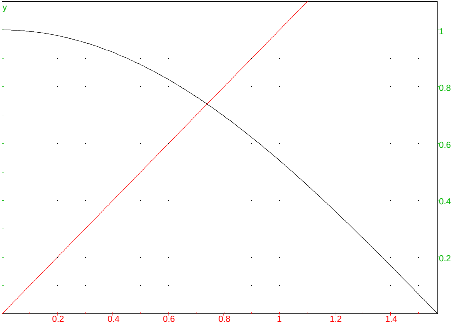
Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Pour appliquer le théorème du point fixe, il faut d'abord trouver un intervalle I sur lequel $f(x) = \cos(x)$ satisfasse aux hypothèses :

$$f(I) \subset I \quad \text{et} \quad f|_I : I \to I \quad \text{est contractante.}$$

Un dessin aidera !



Exemple d'application (1/3)

Exemple

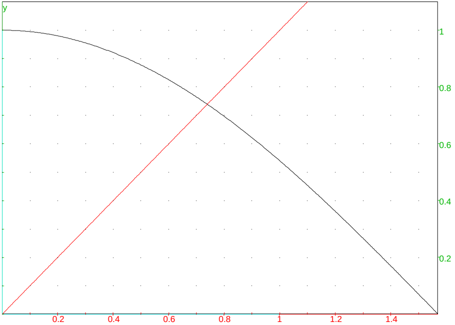
On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Pour appliquer le théorème du point fixe, il faut d'abord trouver un intervalle I sur lequel $f(x) = \cos(x)$ satisfasse aux hypothèses :

$$f(I) \subset I \quad \text{et} \quad f|_I : I \to I \quad \text{est contractante.}$$

Un dessin aidera !

```
plot([x,cos(x)],x=0..pi/2)
```



Exemple d'application (1/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

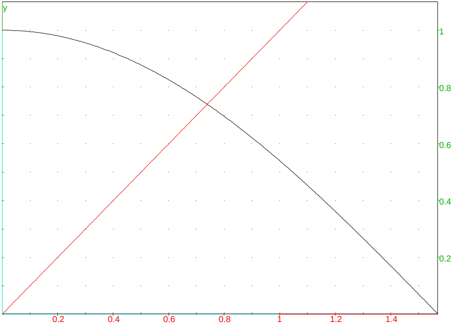
Pour appliquer le théorème du point fixe, il faut d'abord trouver un intervalle I sur lequel $f(x) = \cos(x)$ satisfasse aux hypothèses :

$$f(I) \subset I \quad \text{et} \quad f|_I : I \to I \quad \text{est contractante.}$$

Un dessin aidera !

```
plot([x,cos(x)],x=0..pi/2)
```

On voit qu'une solution se trouve dans $[0.6, 0.8]$



Exemple d'application (2/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Exemple d'application (2/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Pour $f(x) = \cos(x)$ essayons l'intervalle $I = [0.6, 0.8]$:

Exemple d'application (2/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Pour $f(x) = \cos(x)$ essayons l'intervalle $I = [0.6, 0.8]$:

- On a $f(0.6) = 0.825\ldots > 0.8$, donc $f(I) \not\subset I$.
  Ainsi f ne se restreint pas à $f\colon I \to I$.

Exemple d'application (2/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Pour $f(x) = \cos(x)$ essayons l'intervalle $I = [0.6, 0.8]$:

- On a $f(0.6) = 0.825\ldots > 0.8$, donc $f(I) \not\subset I$.
  Ainsi f ne se restreint pas à $f\colon I \to I$.

Essayons l'intervalle $I = [0, \pi/2]$:

Exemple d'application (2/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Pour $f(x) = \cos(x)$ essayons l'intervalle $I = [0.6, 0.8]$:

- On a $f(0.6) = 0.825\ldots > 0.8$, donc $f(I) \not\subset I$.
  Ainsi f ne se restreint pas à $f\colon I \to I$.

Essayons l'intervalle $I = [0, \pi/2]$:

- On a $f(I) = [0, 1] \subset I$, donc c'est bon.

Exemple d'application (2/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Pour $f(x) = \cos(x)$ essayons l'intervalle $I = [0.6, 0.8]$:

- On a $f(0.6) = 0.825\ldots > 0.8$, donc $f(I) \not\subset I$.
  Ainsi f ne se restreint pas à $f\colon I \to I$.

Essayons l'intervalle $I = [0, \pi/2]$:

- On a $f(I) = [0, 1] \subset I$, donc c'est bon.
- On a $f'(x) = -\sin(x)$, donc $-1 \leq f' \leq 0$.

Exemple d'application (2/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Pour $f(x) = \cos(x)$ essayons l'intervalle $I = [0.6, 0.8]$:

- On a $f(0.6) = 0.825\ldots > 0.8$, donc $f(I) \not\subset I$.
  Ainsi f ne se restreint pas à $f\colon I \to I$.

Essayons l'intervalle $I = [0, \pi/2]$:

- On a $f(I) = [0, 1] \subset I$, donc c'est bon.
- On a $f'(x) = -\sin(x)$, donc $-1 \le f' \le 0$.

Malheureusement $|f'(\pi/2)| = 1$, donc $f|_I$ n'est pas contractante.

Exemple d'application (2/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Pour $f(x) = \cos(x)$ essayons l'intervalle $I = [0.6, 0.8]$:

- On a $f(0.6) = 0.825\ldots > 0.8$, donc $f(I) \not\subset I$.
  Ainsi f ne se restreint pas à $f\colon I \to I$.

Essayons l'intervalle $I = [0, \pi/2]$:

- On a $f(I) = [0, 1] \subset I$, donc c'est bon.
- On a $f'(x) = -\sin(x)$, donc $-1 \leq f' \leq 0$.

Malheureusement $|f'(\pi/2)| = 1$, donc $f|_I$ n'est pas contractante.

⚠ Le théorème ne s'applique pas bêtement :

Exemple d'application (2/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Pour $f(x) = \cos(x)$ essayons l'intervalle $I = [0.6, 0.8]$:

- On a $f(0.6) = 0.825\ldots > 0.8$, donc $f(I) \not\subset I$.
  Ainsi f ne se restreint pas à $f \colon I \to I$.

Essayons l'intervalle $I = [0, \pi/2]$:

- On a $f(I) = [0, 1] \subset I$, donc c'est bon.
- On a $f'(x) = -\sin(x)$, donc $-1 \le f' \le 0$.

Malheureusement $|f'(\pi/2)| = 1$, donc $f|_I$ n'est pas contractante.

⚠ Le théorème ne s'applique pas bêtement :
Il faut bien choisir l'intervalle puis vérifier les hypothèses.

Exemple d'application (3/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Exemple d'application (3/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Essayons l'intervalle $I = [0, 1]$:

Exemple d'application (3/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Essayons l'intervalle $I = [0, 1]$:

- On a $f'(x) = -\sin(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$,

Exemple d’application (3/3)

Exemple

On se propose de résoudre l’équation $x = \cos(x)$.

Essayons l’intervalle $I = [0,1]$:

- On a $f'(x) = -\sin(x) \leq 0$ sur $[0,1]$,
  donc f décroît de $f(0) = 1$ à $f(1) = 0.5403\ldots > 0.5$.

Exemple d'application (3/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Essayons l'intervalle $I = [0, 1]$:

- On a $f'(x) = -\sin(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f décroît de $f(0) = 1$ à $f(1) = 0.5403\ldots > 0.5$.
  On conclut que $f(I) \subset [0.5, 1] \subset I$.

Exemple d'application (3/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Essayons l'intervalle $I = [0, 1]$:

- On a $f'(x) = -\sin(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f décroît de $f(0) = 1$ à $f(1) = 0.5403\ldots > 0.5$.
  On conclut que $f(I) \subset [0.5, 1] \subset I$.
- On a $f''(x) = -\cos(x) < 0$ sur $[0, 1]$,

Exemple d'application (3/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Essayons l'intervalle $I = [0, 1]$:

- On a $f'(x) = -\sin(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f décroît de $f(0) = 1$ à $f(1) = 0.5403\ldots > 0.5$.
  On conclut que $f(I) \subset [0.5, 1] \subset I$.
- On a $f''(x) = -\cos(x) < 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f' décroît de $f'(0) = 0$ à $f'(1) = -0.8414\ldots > -0.85$.

Exemple d'application (3/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Essayons l'intervalle $I = [0, 1]$:

- On a $f'(x) = -\sin(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f décroît de $f(0) = 1$ à $f(1) = 0.5403\ldots > 0.5$.
  On conclut que $f(I) \subset [0.5, 1] \subset I$.
- On a $f''(x) = -\cos(x) < 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f' décroît de $f'(0) = 0$ à $f'(1) = -0.8414\ldots > -0.85$.
  On conclut que $|f'| \leq 0.85 =: k$ sur I.

Exemple d'application (3/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Essayons l'intervalle $I = [0, 1]$:

- On a $f'(x) = -\sin(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f décroît de $f(0) = 1$ à $f(1) = 0.5403\ldots > 0.5$.
  On conclut que $f(I) \subset [0.5, 1] \subset I$.
- On a $f''(x) = -\cos(x) < 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f' décroît de $f'(0) = 0$ à $f'(1) = -0.8414\ldots > -0.85$.
  On conclut que $|f'| \leq 0.85 =: k$ sur I.

On peut donc appliquer le théorème.

Exemple d'application (3/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Essayons l'intervalle $I = [0, 1]$:

- On a $f'(x) = -\sin(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f décroît de $f(0) = 1$ à $f(1) = 0.5403\ldots > 0.5$.
  On conclut que $f(I) \subset [0.5, 1] \subset I$.
- On a $f''(x) = -\cos(x) < 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f' décroît de $f'(0) = 0$ à $f'(1) = -0.8414\ldots > -0.85$.
  On conclut que $|f'| \leq 0.85 =: k$ sur I.

On peut donc appliquer le théorème. Pour $u_0 = 1$ on obtient la suite

$$u_1 = 0.5403023058\ldots \quad u_9 = 0.7314040424\ldots \quad u_{19} = 0.7389377567\ldots$$
$$u_2 = 0.8575532158\ldots \quad u_{10} = 0.7442373549\ldots \quad u_{20} = 0.7391843997\ldots$$

Exemple d'application (3/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Essayons l'intervalle $I = [0, 1]$:

- On a $f'(x) = -\sin(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f décroît de $f(0) = 1$ à $f(1) = 0.5403\ldots > 0.5$.
  On conclut que $f(I) \subset [0.5, 1] \subset I$.
- On a $f''(x) = -\cos(x) < 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f' décroît de $f'(0) = 0$ à $f'(1) = -0.8414\ldots > -0.85$.
  On conclut que $|f'| \leq 0.85 =: k$ sur I.

On peut donc appliquer le théorème. Pour $u_0 = 1$ on obtient la suite

$$\begin{array}{lll} u_1 = 0.5403023058\ldots & u_9 = 0.7314040424\ldots & u_{19} = 0.7389377567\ldots \\ u_2 = 0.8575532158\ldots & u_{10} = 0.7442373549\ldots & u_{20} = 0.7391843997\ldots \end{array}$$

On trouve $|u_{20} - u_{19}| < 0.00025$ et $\frac{k}{1-k} = 5.666\ldots < 6$.

Exemple d'application (3/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Essayons l'intervalle $I = [0, 1]$:

- On a $f'(x) = -\sin(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f décroît de $f(0) = 1$ à $f(1) = 0.5403\ldots > 0.5$.
  On conclut que $f(I) \subset [0.5, 1] \subset I$.
- On a $f''(x) = -\cos(x) < 0$ sur $[0, 1]$,
  donc f' décroît de $f'(0) = 0$ à $f'(1) = -0.8414\ldots > -0.85$.
  On conclut que $|f'| \leq 0.85 =: k$ sur I.

On peut donc appliquer le théorème. Pour $u_0 = 1$ on obtient la suite

$$u_1 = 0.5403023058\ldots \quad u_9 = 0.7314040424\ldots \quad u_{19} = 0.7389377567\ldots$$
$$u_2 = 0.8575532158\ldots \quad u_{10} = 0.7442373549\ldots \quad u_{20} = 0.7391843997\ldots$$

On trouve $|u_{20} - u_{19}| < 0.00025$ et $\frac{k}{1-k} = 5.666\ldots < 6$.
On conclut que $|u_{20} - a| \leq \frac{k}{1-k}|u_{20} - u_{19}| < 0.0015$.

Le théorème du point fixe (rappel)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Le théorème du point fixe (rappel)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f\colon I \to I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

Le théorème du point fixe (rappel)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f \colon I \to I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

1. *Il existe un et un seul point $a \in I$ vérifiant $f(a) = a$.*

Le théorème du point fixe (rappel)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f \colon I \to I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

1. *Il existe un et un seul point $a \in I$ vérifiant $f(a) = a$.*
2. *Pour tout $u_0 \in I$ la suite itérative $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.*

Le théorème du point fixe (rappel)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f \colon I \to I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

1. *Il existe un et un seul point $a \in I$ vérifiant $f(a) = a$.*
2. *Pour tout $u_0 \in I$ la suite itérative $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.*
3. *On a $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$, la convergence vers a est donc au moins aussi rapide que celle de la suite géométrique k^n vers 0.*

Le théorème du point fixe (rappel)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f\colon I \to I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

1. *Il existe un et un seul point $a \in I$ vérifiant $f(a) = a$.*
2. *Pour tout $u_0 \in I$ la suite itérative $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.*
3. *On a $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$, la convergence vers a est donc au moins aussi rapide que celle de la suite géométrique k^n vers 0.*
4. *Pour contrôler l'approximation on a l'estimation de l'écart*

$$\big|u_n - a\big| \;\leq\; \tfrac{k}{1-k} \cdot \big|u_n - u_{n-1}\big|.$$

Généralisation du théorème

Le théorème du point fixe est un important principe *constructif* :

Généralisation du théorème

Le théorème du point fixe est un important principe *constructif* :

- Il assure *l'existence* et *l'unicité* d'une solution.

Généralisation du théorème

Le théorème du point fixe est un important principe *constructif* :

- Il assure *l'existence* et *l'unicité* d'une solution.
- Il donne aussi une *méthode* pour approcher la solution.

Généralisation du théorème

Le théorème du point fixe est un important principe *constructif* :

- Il assure *l'existence* et *l'unicité* d'une solution.
- Il donne aussi une *méthode* pour approcher la solution.

Il se généralise de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$ voire à tout espace métrique complet.

Généralisation du théorème

Le théorème du point fixe est un important principe *constructif* :

- Il assure *l'existence* et *l'unicité* d'une solution.
- Il donne aussi une *méthode* pour approcher la solution.

Il se généralise de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$ voire à tout espace métrique complet.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ *fermé et soit* $f\colon X \to X$ *contractante de rapport* $k < 1$*.*

Généralisation du théorème

Le théorème du point fixe est un important principe *constructif* :

- Il assure *l'existence* et *l'unicité* d'une solution.
- Il donne aussi une *méthode* pour approcher la solution.

Il se généralise de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$ voire à tout espace métrique complet.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ fermé et soit $f\colon X \to X$ contractante de rapport $k < 1$. Alors il existe un et un seul point $a \in X$ vérifiant $a = f(a)$.

Généralisation du théorème

Le théorème du point fixe est un important principe *constructif* :

- Il assure *l'existence* et *l'unicité* d'une solution.
- Il donne aussi une *méthode* pour approcher la solution.

Il se généralise de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$ voire à tout espace métrique complet.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ *fermé et soit* $f\colon X \to X$ *contractante de rapport* $k < 1$.
Alors il existe un et un seul point $a \in X$ *vérifiant* $a = f(a)$.
Pour tout $u_0 \in X$ *la suite itérative* $u_{n+1} = f(u_n)$ *converge vers* a.

Généralisation du théorème

Le théorème du point fixe est un important principe *constructif* :

- Il assure *l'existence* et *l'unicité* d'une solution.
- Il donne aussi une *méthode* pour approcher la solution.

Il se généralise de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$ voire à tout espace métrique complet.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ *fermé et soit* $f \colon X \to X$ *contractante de rapport* $k < 1$*.*
Alors il existe un et un seul point $a \in X$ *vérifiant* $a = f(a)$*.*
Pour tout $u_0 \in X$ *la suite itérative* $u_{n+1} = f(u_n)$ *converge vers* a*.*
On a $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$ *ainsi que* $|u_n - a| \leq \frac{k}{1-k} \cdot |u_n - u_{n-1}|$*.*

Généralisation du théorème

Le théorème du point fixe est un important principe *constructif* :

- Il assure *l'existence* et *l'unicité* d'une solution.
- Il donne aussi une *méthode* pour approcher la solution.

Il se généralise de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$ voire à tout espace métrique complet.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ *fermé et soit* $f \colon X \to X$ *contractante de rapport* $k < 1$*.*
Alors il existe un et un seul point $a \in X$ *vérifiant* $a = f(a)$*.*
Pour tout $u_0 \in X$ *la suite itérative* $u_{n+1} = f(u_n)$ *converge vers* a*.*
On a $|u_n - a| \le k^n |u_0 - a|$ *ainsi que* $|u_n - a| \le \frac{k}{1-k} \cdot |u_n - u_{n-1}|$*.*

Démonstration. Notre preuve se généralise mot à mot. □

Généralisation du théorème

Le théorème du point fixe est un important principe *constructif* :

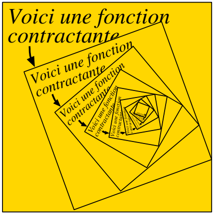
- Il assure *l'existence* et *l'unicité* d'une solution.
- Il donne aussi une *méthode* pour approcher la solution.

Il se généralise de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$ voire à tout espace métrique complet.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ fermé et soit $f : X \to X$ contractante de rapport $k < 1$.
Alors il existe un et un seul point $a \in X$ vérifiant $a = f(a)$.
Pour tout $u_0 \in X$ la suite itérative $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.
On a $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$ ainsi que $|u_n - a| \leq \frac{k}{1-k} \cdot |u_n - u_{n-1}|$.

Démonstration. Notre preuve se généralise mot à mot. □



Exemple illustratif :

Généralisation du théorème

Le théorème du point fixe est un important principe *constructif* :

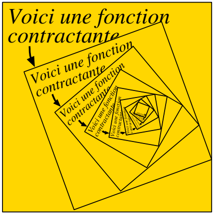
- Il assure *l'existence* et *l'unicité* d'une solution.
- Il donne aussi une *méthode* pour approcher la solution.

Il se généralise de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$ voire à tout espace métrique complet.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ *fermé et soit* $f \colon X \to X$ *contractante de rapport* $k < 1$*.*
Alors il existe un et un seul point $a \in X$ *vérifiant* $a = f(a)$*.*
Pour tout $u_0 \in X$ *la suite itérative* $u_{n+1} = f(u_n)$ *converge vers* a*.*
On a $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$ *ainsi que* $|u_n - a| \leq \frac{k}{1-k} \cdot |u_n - u_{n-1}|$*.*

Démonstration. Notre preuve se généralise mot à mot. □



Exemple illustratif :

Plaçons une carte de Grenoble sur la table.

Généralisation du théorème

Le théorème du point fixe est un important principe *constructif* :

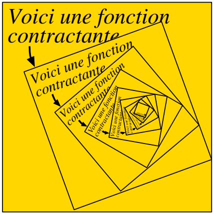
- Il assure *l'existence* et *l'unicité* d'une solution.
- Il donne aussi une *méthode* pour approcher la solution.

Il se généralise de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$ voire à tout espace métrique complet.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ fermé et soit $f\colon X \to X$ contractante de rapport $k < 1$.
Alors il existe un et un seul point $a \in X$ vérifiant $a = f(a)$.
Pour tout $u_0 \in X$ la suite itérative $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.
On a $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$ ainsi que $|u_n - a| \leq \frac{k}{1-k} \cdot |u_n - u_{n-1}|$.

Démonstration. Notre preuve se généralise mot à mot. □



Exemple illustratif :

Plaçons une carte de Grenoble sur la table.

Existe-t-il un point sur la carte qui se trouve exactement à l'endroit qu'il désigne ?

Sommaire

Points fixes super-attractifs

Soit $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

Points fixes super-attractifs

Soit $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

Définition

Un point fixe $a = \phi(a)$ est dit *super-attractif* si $\phi'(a) = 0$.

Points fixes super-attractifs

Soit $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

Définition

Un point fixe $a = \phi(a)$ est dit *super-attractif* si $\phi'(a) = 0$.

Point fixe attractif $\Rightarrow$ convergence linéaire :

Points fixes super-attractifs

Soit $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

Définition

Un point fixe $a = \phi(a)$ est dit *super-attractif* si $\phi'(a) = 0$.

Point fixe attractif $\Rightarrow$ convergence linéaire :
Il existe un voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ sur lequel $|\phi'| \leq \frac{1}{2}$.

Points fixes super-attractifs

Soit $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

Définition

Un point fixe $a = \phi(a)$ est dit *super-attractif* si $\phi'(a) = 0$.

Point fixe attractif $\Rightarrow$ convergence linéaire :
Il existe un voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ sur lequel $|\phi'| \leq \frac{1}{2}$.
Ceci implique que $\phi|_V$ contracte de rapport $\frac{1}{2}$ et assure $\phi(V) \subset V$.

Points fixes super-attractifs

Soit $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

Définition

Un point fixe $a = \phi(a)$ est dit *super-attractif* si $\phi'(a) = 0$.

Point fixe attractif $\Rightarrow$ convergence linéaire :
Il existe un voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ sur lequel $|\phi'| \leq \frac{1}{2}$.
Ceci implique que $\phi|_V$ contracte de rapport $\frac{1}{2}$ et assure $\phi(V) \subset V$.
Pour tout $u_0 \in V$ la suite itérative $u_n = \phi^n(u_0)$ converge donc vers a.

Points fixes super-attractifs

Soit $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

Définition

Un point fixe $a = \phi(a)$ est dit *super-attractif* si $\phi'(a) = 0$.

Point fixe attractif $\Rightarrow$ convergence linéaire :
Il existe un voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ sur lequel $|\phi'| \le \frac{1}{2}$.
Ceci implique que $\phi|_V$ contracte de rapport $\frac{1}{2}$ et assure $\phi(V) \subset V$.
Pour tout $u_0 \in V$ la suite itérative $u_n = \phi^n(u_0)$ converge donc vers a.

Point fixe super-attractif $\Rightarrow$ convergence quadratique :

Points fixes super-attractifs

Soit $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

Définition

Un point fixe $a = \phi(a)$ est dit *super-attractif* si $\phi'(a) = 0$.

Point fixe attractif $\Rightarrow$ convergence linéaire :
Il existe un voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ sur lequel $|\phi'| \leq \frac{1}{2}$.
Ceci implique que $\phi|_V$ contracte de rapport $\frac{1}{2}$ et assure $\phi(V) \subset V$.
Pour tout $u_0 \in V$ la suite itérative $u_n = \phi^n(u_0)$ converge donc vers a.

Point fixe super-attractif $\Rightarrow$ convergence quadratique :
Soit $M := \max_V |\phi''|$.

Points fixes super-attractifs

Soit $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

Définition

Un point fixe $a = \phi(a)$ est dit *super-attractif* si $\phi'(a) = 0$.

Point fixe attractif $\Rightarrow$ convergence linéaire :
Il existe un voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ sur lequel $|\phi'| \leq \frac{1}{2}$.
Ceci implique que $\phi|_V$ contracte de rapport $\frac{1}{2}$ et assure $\phi(V) \subset V$.
Pour tout $u_0 \in V$ la suite itérative $u_n = \phi^n(u_0)$ converge donc vers a.

Point fixe super-attractif $\Rightarrow$ convergence quadratique :
Soit $M := \max_V |\phi''|$. Pour $x \in V$ le développement de Taylor donne

$$\phi(x) = \phi(a) + \phi'(a)(x - a) + \frac{1}{2}\phi''(\xi)(x - a)^2.$$

Points fixes super-attractifs

Soit $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

Définition

Un point fixe $a = \phi(a)$ est dit *super-attractif* si $\phi'(a) = 0$.

Point fixe attractif $\Rightarrow$ convergence linéaire :
Il existe un voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ sur lequel $|\phi'| \le \frac{1}{2}$.
Ceci implique que $\phi|_V$ contracte de rapport $\frac{1}{2}$ et assure $\phi(V) \subset V$.
Pour tout $u_0 \in V$ la suite itérative $u_n = \phi^n(u_0)$ converge donc vers a.

Point fixe super-attractif $\Rightarrow$ convergence quadratique :
Soit $M := \max_V |\phi''|$. Pour $x \in V$ le développement de Taylor donne

$$\phi(x) = \phi(a) + \phi'(a)(x - a) + \frac{1}{2}\phi''(\xi)(x - a)^2.$$

Ainsi $|\phi(x) - a| \le \frac{M}{2}|x - a|^2$ ou encore $\left(\frac{M}{2}|\phi(x) - a|\right) \le \left(\frac{M}{2}|x - a|\right)^2$.

Points fixes super-attractifs

Soit $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

Définition

Un point fixe $a = \phi(a)$ est dit *super-attractif* si $\phi'(a) = 0$.

Point fixe attractif $\Rightarrow$ convergence linéaire :
Il existe un voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ sur lequel $|\phi'| \leq \frac{1}{2}$.
Ceci implique que $\phi|_V$ contracte de rapport $\frac{1}{2}$ et assure $\phi(V) \subset V$.
Pour tout $u_0 \in V$ la suite itérative $u_n = \phi^n(u_0)$ converge donc vers a.

Point fixe super-attractif $\Rightarrow$ convergence quadratique :
Soit $M := \max_V |\phi''|$. Pour $x \in V$ le développement de Taylor donne

$$\phi(x) = \phi(a) + \phi'(a)(x - a) + \frac{1}{2}\phi''(\xi)(x - a)^2.$$

Ainsi $|\phi(x) - a| \leq \frac{M}{2}|x - a|^2$ ou encore $\left(\frac{M}{2}|\phi(x) - a|\right) \leq \left(\frac{M}{2}|x - a|\right)^2$.
Pour $u_n \in V$ on en déduit que $\left(\frac{M}{2}|\phi^m(u_n) - a|\right) \leq \left(\frac{M}{2}|u_n - a|\right)^{2^m}$.

Points fixes super-attractifs

Soit $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

Définition

Un point fixe $a = \phi(a)$ est dit *super-attractif* si $\phi'(a) = 0$.

Point fixe attractif $\Rightarrow$ convergence linéaire :
Il existe un voisinage $V = [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ sur lequel $|\phi'| \le \frac{1}{2}$.
Ceci implique que $\phi|_V$ contracte de rapport $\frac{1}{2}$ et assure $\phi(V) \subset V$.
Pour tout $u_0 \in V$ la suite itérative $u_n = \phi^n(u_0)$ converge donc vers a.

Point fixe super-attractif $\Rightarrow$ convergence quadratique :
Soit $M := \max_V |\phi''|$. Pour $x \in V$ le développement de Taylor donne

$$\phi(x) = \phi(a) + \phi'(a)(x-a) + \frac{1}{2}\phi''(\xi)(x-a)^2.$$

Ainsi $|\phi(x) - a| \le \frac{M}{2}|x-a|^2$ ou encore $\left(\frac{M}{2}|\phi(x)-a|\right) \le \left(\frac{M}{2}|x-a|\right)^2$.
Pour $u_n \in V$ on en déduit que $\left(\frac{M}{2}|\phi^m(u_n)-a|\right) \le \left(\frac{M}{2}|u_n-a|\right)^{2^m}$.
Dès que $M|u_n - a| \le 1$ ceci assure une convergence quadratique !

La formule de Newton

L’idée est de tirer profit du calcul différentiel, un outil très puissant !

La formule de Newton

L'idée est de tirer profit du calcul différentiel, un outil très puissant !

On part d'une approximation $u_n \approx r$
d'une solution r de l'équation $f(r) = 0$.

La formule de Newton

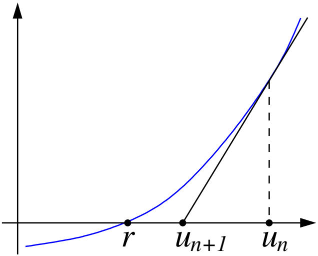
L'idée est de tirer profit du calcul différentiel, un outil très puissant !

On part d'une approximation $u_n \approx r$
d'une solution r de l'équation $f(r) = 0$.

On approche f par la tangente en u_n :

$$t(x) := f(u_n) + f'(u_n) \cdot (x - u_n).$$

C'est l'approximation de Taylor d'ordre 1.



La formule de Newton

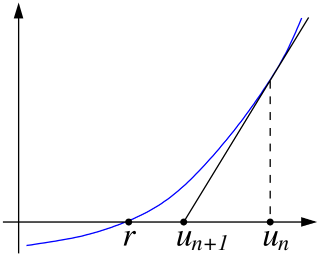
L'idée est de tirer profit du calcul différentiel, un outil très puissant !

On part d'une approximation $u_n \approx r$ d'une solution r de l'équation $f(r) = 0$.

On approche f par la tangente en u_n :

$$t(x) := f(u_n) + f'(u_n) \cdot (x - u_n).$$

C'est l'approximation de Taylor d'ordre 1.



Pour u_{n+1} on prendra l'unique solution de l'équation affine $t(x) = 0$:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

La formule de Newton

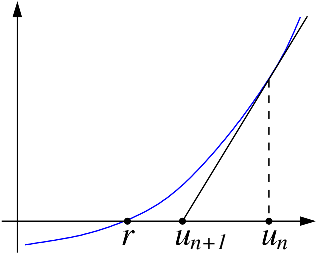
L'idée est de tirer profit du calcul différentiel, un outil très puissant !

On part d'une approximation $u_n \approx r$ d'une solution r de l'équation $f(r) = 0$.

On approche f par la tangente en u_n :

$$t(x) := f(u_n) + f'(u_n) \cdot (x - u_n).$$

C'est l'approximation de Taylor d'ordre 1.



Pour u_{n+1} on prendra l'unique solution de l'équation affine $t(x) = 0$:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

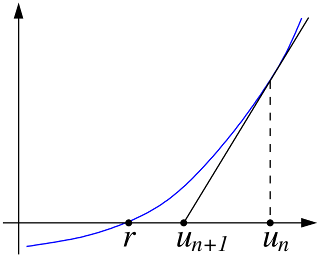
Autrement dit, on itère *l'application de Newton* ϕ définie par

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

La formule de Newton

L'idée est de tirer profit du calcul différentiel, un outil très puissant !

On part d'une approximation $u_n \approx r$ d'une solution r de l'équation $f(r) = 0$.



On approche f par la tangente en u_n :

$$t(x) := f(u_n) + f'(u_n) \cdot (x - u_n).$$

C'est l'approximation de Taylor d'ordre 1.

Pour u_{n+1} on prendra l'unique solution de l'équation affine $t(x) = 0$:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Autrement dit, on itère *l'application de Newton* ϕ définie par

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Exemple : pour $f(x) = x^n - a$ la solution de $f(r) = 0$ vérifie $r^n = a$.

La formule de Newton

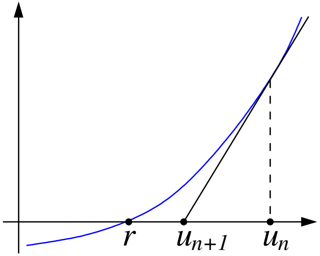
L'idée est de tirer profit du calcul différentiel, un outil très puissant !

On part d'une approximation $u_n \approx r$ d'une solution r de l'équation $f(r) = 0$.

On approche f par la tangente en u_n :

$$t(x) := f(u_n) + f'(u_n) \cdot (x - u_n).$$

C'est l'approximation de Taylor d'ordre 1.



Pour u_{n+1} on prendra l'unique solution de l'équation affine $t(x) = 0$:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Autrement dit, on itère *l'application de Newton* ϕ définie par

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Exemple : pour $f(x) = x^n - a$ la solution de $f(r) = 0$ vérifie $r^n = a$.
Ici on trouve la formule $\phi(x) = \frac{1}{n}\left[(n-1)x + a/x^{n-1}\right]$ déjà vue !

Newton est super-attractif

Définition

Soit $f\colon \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable.

Newton est super-attractif

Définition

Soit $f\colon \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable.
L'application de Newton $\phi\colon U^* \to \mathbb{R}$ associée à f est définie par

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \text{sur} \qquad U^* = \{x \in U \mid f'(x) \neq 0\}.$$

Newton est super-attractif

Définition

Soit $f\colon \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable.
L'application de Newton $\phi\colon U^* \to \mathbb{R}$ associée à f est définie par

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \text{sur} \qquad U^* = \{x \in U \mid f'(x) \neq 0\}.$$

Proposition (Les zéros de f sont les points fixes de ϕ.)

Pour tout $r \in U^*$ on a $f(r) = 0$ si et seulement si $\phi(r) = r$.

Newton est super-attractif

Définition

Soit $f\colon \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable.
L'application de Newton $\phi\colon U^* \to \mathbb{R}$ associée à f est définie par

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \text{sur} \qquad U^* = \{x \in U \mid f'(x) \neq 0\}.$$

Proposition (Les zéros de f sont les points fixes de ϕ.)

Pour tout $r \in U^*$ on a $f(r) = 0$ si et seulement si $\phi(r) = r$.
Si f est de classe C^2, alors tout point fixe $r = \phi(r)$ vérifie $\phi'(r) = 0$.

Newton est super-attractif

Définition

Soit $f\colon \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable.
L'application de Newton $\phi\colon U^* \to \mathbb{R}$ associée à f est définie par

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \text{sur} \qquad U^* = \{x \in U \mid f'(x) \neq 0\}.$$

Proposition (Les zéros de f sont les points fixes de ϕ.)

Pour tout $r \in U^*$ on a $f(r) = 0$ si et seulement si $\phi(r) = r$.
Si f est de classe C^2, alors tout point fixe $r = \phi(r)$ vérifie $\phi'(r) = 0$.

◈ Si l'on choisit u_0 proche d'une solution r de l'équation $f(r) = 0$, alors la suite $u_n = \phi^n(u_0)$ converge vers r de manière quadratique !

Newton ne converge pas toujours

Exemple classique : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$.

Newton ne converge pas toujours

Exemple classique : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$.

L'unique solution de l'équation $f(r) = 0$ est $r = 0$.

Newton ne converge pas toujours

Exemple classique : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$.

L'unique solution de l'équation $f(r) = 0$ est $r = 0$.

On a $f'(0) = 1$, donc $r = 0$ est bien une racine simple.

Newton ne converge pas toujours

Exemple classique : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$.

L'unique solution de l'équation $f(r) = 0$ est $r = 0$.

On a $f'(0) = 1$, donc $r = 0$ est bien une racine simple.

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - (1 + x^2)\arctan(x).$$

Newton ne converge pas toujours

Exemple classique : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$.

L'unique solution de l'équation $f(r) = 0$ est $r = 0$.

On a $f'(0) = 1$, donc $r = 0$ est bien une racine simple.

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - (1 + x^2)\arctan(x).$$

Pour u_0 proche de 0 on trouve $\phi^n(u_0) \to 0$, comme il faut.

Newton ne converge pas toujours

Exemple classique : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$.

L'unique solution de l'équation $f(r) = 0$ est $r = 0$.

On a $f'(0) = 1$, donc $r = 0$ est bien une racine simple.

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - (1 + x^2)\arctan(x).$$

Pour u_0 proche de 0 on trouve $\phi^n(u_0) \to 0$, comme il faut.

À titre d'avertissement, prenons une valeur initiale u_0 loin de 0 :

Newton ne converge pas toujours

Exemple classique : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$.

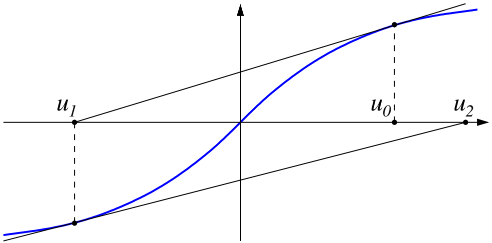
L'unique solution de l'équation $f(r) = 0$ est $r = 0$.

On a $f'(0) = 1$, donc $r = 0$ est bien une racine simple.

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - (1 + x^2)\arctan(x).$$

Pour u_0 proche de 0 on trouve $\phi^n(u_0) \to 0$, comme il faut.

À titre d'avertissement, prenons une valeur initiale u_0 loin de 0 :



$$\begin{aligned} u_0 &= +1.5 \\ u_1 &= -1.6940796\ldots \\ u_2 &= +2.3211269\ldots \\ u_3 &= -5.1140878\ldots \\ u_4 &= +32.2956839\ldots \\ |u_n| &\to \infty \end{aligned}$$

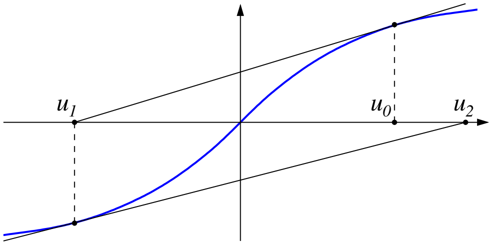
Newton ne converge pas toujours

Exemple classique : $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$.
L'unique solution de l'équation $f(r) = 0$ est $r = 0$.
On a $f'(0) = 1$, donc $r = 0$ est bien une racine simple.

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - (1 + x^2)\arctan(x).$$

Pour u_0 proche de 0 on trouve $\phi^n(u_0) \to 0$, comme il faut.

À titre d'avertissement, prenons une valeur initiale u_0 loin de 0 :



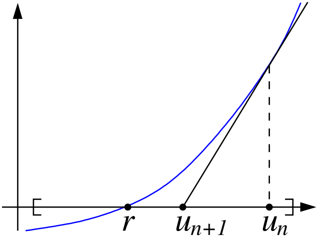
$$\begin{aligned} u_0 &= +1.5 \\ u_1 &= -1.6940796\ldots \\ u_2 &= +2.3211269\ldots \\ u_3 &= -5.1140878\ldots \\ u_4 &= +32.2956839\ldots \end{aligned}$$

$$|u_n| \to \infty$$

Le bassin d'attraction de $r = 0$ est l'intervalle $]-a, +a[$ où a est la solution positive de $\phi(a) = -a$. Numériquement on trouve $a \approx 1.3917$.

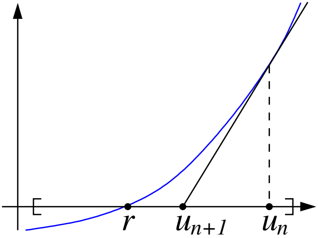
Fonctions convexes et convergence monotone (1/2)

Reconsidérons l'itération de Newton dans la situation suivante :



Fonctions convexes et convergence monotone (1/2)

Reconsidérons l'itération de Newton dans la situation suivante :

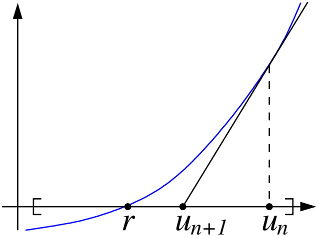


Théorème (convergence monotone)

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable,*
vérifiant $f(a) \le 0 < f(b)$ *et* $f'(a) > 0$ *et* $f'' \ge 0$ *sur* $[a,b]$*.*

Fonctions convexes et convergence monotone (1/2)

Reconsidérons l'itération de Newton dans la situation suivante :



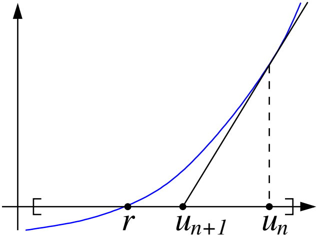
Théorème (convergence monotone)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable,*
vérifiant $f(a) \leq 0 < f(b)$ *et* $f'(a) > 0$ *et* $f'' \geq 0$ *sur* $[a, b]$.

Alors il existe une unique solution $r \in [a, b[$ *vérifiant* $f(r) = 0$.

Fonctions convexes et convergence monotone (1/2)

Reconsidérons l'itération de Newton dans la situation suivante :



Théorème (convergence monotone)

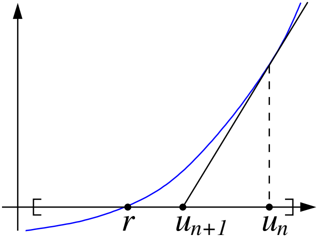
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable,*
vérifiant $f(a) \leq 0 < f(b)$ *et* $f'(a) > 0$ *et* $f'' \geq 0$ *sur* $[a,b]$*.*

Alors il existe une unique solution $r \in [a,b[$ *vérifiant* $f(r) = 0$*.*

Pour tout $u_0 \in [a,b]$ *vérifiant* $f(u_0) > 0$ *la suite* $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$
est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$*, décroissante, et converge vers* r*.*

Fonctions convexes et convergence monotone (1/2)

Reconsidérons l'itération de Newton dans la situation suivante :



Théorème (convergence monotone)

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable,*
vérifiant $f(a) \le 0 < f(b)$ *et* $f'(a) > 0$ *et* $f'' \ge 0$ *sur* $[a,b]$.

Alors il existe une unique solution $r \in [a,b[$ *vérifiant* $f(r) = 0$.

Pour tout $u_0 \in [a,b]$ *vérifiant* $f(u_0) > 0$ *la suite* $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$
est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, *décroissante, et converge vers* r.

De plus on peut majorer l'erreur par $0 \le u_n - r \le \frac{f(u_n)}{f'(a)}$.

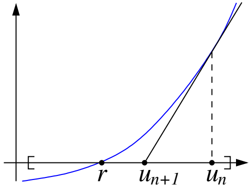
Fonctions convexes et convergence monotone (2/2)

Supposons $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$. Quatre cas typiques se présentent :

Fonctions convexes et convergence monotone (2/2)

Supposons $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$. Quatre cas typiques se présentent :

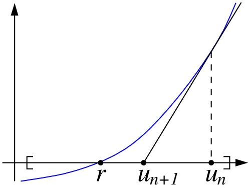
f croissante & convexe :
$f'(a) > 0$, et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.



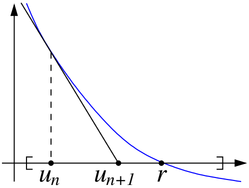
Fonctions convexes et convergence monotone (2/2)

Supposons $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$. Quatre cas typiques se présentent :

f croissante & convexe :
$f'(a) > 0$, et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.



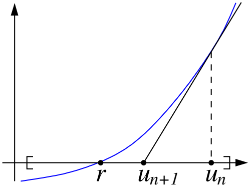
f décroissante & convexe :
$f'(b) < 0$, et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.



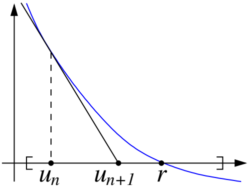
Fonctions convexes et convergence monotone (2/2)

Supposons $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$. Quatre cas typiques se présentent :

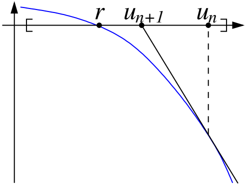
f croissante & convexe :
$f'(a) > 0$, et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.



f décroissante & convexe :
$f'(b) < 0$, et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.

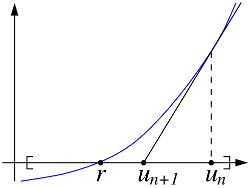


f décroissante & concave :
$f'(a) < 0$, et $f'' \leq 0$ sur $[a, b]$.

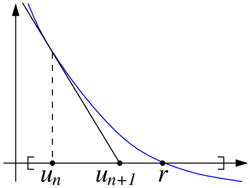


Supposons $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$. Quatre cas typiques se présentent :

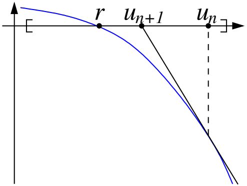
f croissante & convexe :
$f'(a) > 0$, et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.



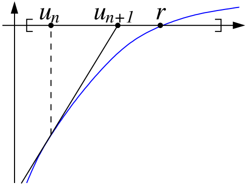
f décroissante & convexe :
$f'(b) < 0$, et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.



f décroissante & concave :
$f'(a) < 0$, et $f'' \leq 0$ sur $[a, b]$.



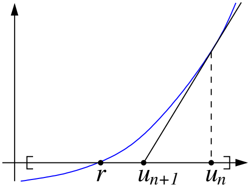
f croissante & concave :
$f'(b) > 0$, et $f'' \leq 0$ sur $[a, b]$.



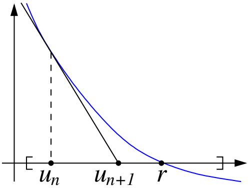
Fonctions convexes et convergence monotone (2/2)

Supposons $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$. Quatre cas typiques se présentent :

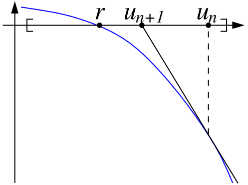
f croissante & convexe :
$f'(a) > 0$, et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.



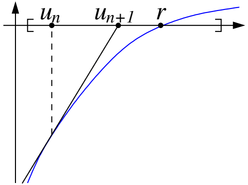
f décroissante & convexe :
$f'(b) < 0$, et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.



f décroissante & concave :
$f'(a) < 0$, et $f'' \leq 0$ sur $[a, b]$.



f croissante & concave :
$f'(b) > 0$, et $f'' \leq 0$ sur $[a, b]$.

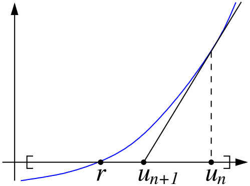


On choisit u_0 tel que $f(u_0) > 0$ (convexe) resp. $f(u_0) < 0$ (concave).

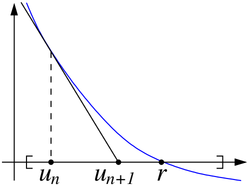
Fonctions convexes et convergence monotone (2/2)

Supposons $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$. Quatre cas typiques se présentent :

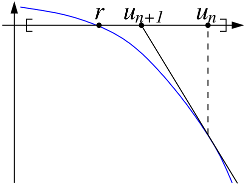
f croissante & convexe :
$f'(a) > 0$, et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.



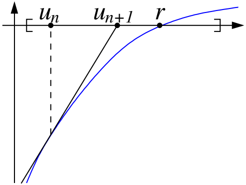
f décroissante & convexe :
$f'(b) < 0$, et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.



f décroissante & concave :
$f'(a) < 0$, et $f'' \leq 0$ sur $[a, b]$.



f croissante & concave :
$f'(b) > 0$, et $f'' \leq 0$ sur $[a, b]$.



On choisit u_0 tel que $f(u_0) > 0$ (convexe) resp. $f(u_0) < 0$ (concave).
On a la majoration $|u_n - r| \leq \frac{|f(u_n)|}{\min |f'|}$ où $\min |f'| = |f'(a)|$ resp. $|f'(b)|$.

Bassin d’attraction dans le plan complexe

Si la méthode de Newton converge, elle converge finalement très vite.

Bassin d'attraction dans le plan complexe

Si la méthode de Newton converge, elle converge finalement très vite.
Mais la suite $\phi^n(u_0)$ ne converge pas pour toute valeur initiale u_0 !

Bassin d'attraction dans le plan complexe

Si la méthode de Newton converge, elle converge finalement très vite.
Mais la suite $\phi^n(u_0)$ ne converge pas pour toute valeur initiale u_0 !

1. Tout d'abord il faut assurer que la solution r visée soit une racine simple : $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$.

Bassin d'attraction dans le plan complexe

Si la méthode de Newton converge, elle converge finalement très vite.
Mais la suite $\phi^n(u_0)$ ne converge pas pour toute valeur initiale u_0 !

1. Tout d'abord il faut assurer que la solution r visée soit une racine simple : $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$.
2. Ensuite il faut bien choisir une valeur initiale u_0 proche de r.

Bassin d'attraction dans le plan complexe

Si la méthode de Newton converge, elle converge finalement très vite.
Mais la suite $\phi^n(u_0)$ ne converge pas pour toute valeur initiale u_0 !

1. Tout d'abord il faut assurer que la solution r visée soit une racine simple : $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$.
2. Ensuite il faut bien choisir une valeur initiale u_0 proche de r.

Question pratique : comment choisir u_0 pour assurer la convergence ?

Bassin d'attraction dans le plan complexe

Si la méthode de Newton converge, elle converge finalement très vite.
Mais la suite $\phi^n(u_0)$ ne converge pas pour toute valeur initiale u_0 !

1. Tout d'abord il faut assurer que la solution r visée soit une racine simple : $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$.
2. Ensuite il faut bien choisir une valeur initiale u_0 proche de r.

Question pratique : comment choisir u_0 pour assurer la convergence ?

Le *bassin d'attraction* d'une racine r
est $A(r) := \{u_0 \mid \phi^n(u_0) \to r\}$.

Bassin d'attraction dans le plan complexe

Si la méthode de Newton converge, elle converge finalement très vite.
Mais la suite $\phi^n(u_0)$ ne converge pas pour toute valeur initiale u_0 !

1. Tout d'abord il faut assurer que la solution r visée soit une racine simple : $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$.
2. Ensuite il faut bien choisir une valeur initiale u_0 proche de r.

Question pratique : comment choisir u_0 pour assurer la convergence ?

Le *bassin d'attraction* d'une racine r
est $A(r) := \{u_0 \mid \phi^n(u_0) \to r\}$.

Illustration.
La question de convergence de $\phi^n(u_0)$
donne lieu à de jolies images fractales !

Bassin d'attraction dans le plan complexe

Si la méthode de Newton converge, elle converge finalement très vite.
Mais la suite $\phi^n(u_0)$ ne converge pas pour toute valeur initiale u_0 !

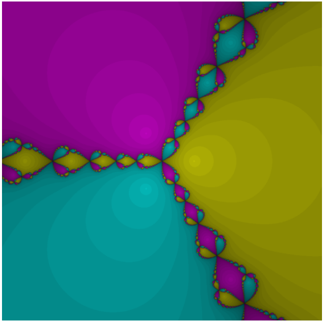
1. Tout d'abord il faut assurer que la solution r visée soit une racine simple : $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$.
2. Ensuite il faut bien choisir une valeur initiale u_0 proche de r.

Question pratique : comment choisir u_0 pour assurer la convergence ?

Le *bassin d'attraction* d'une racine r est $A(r) := \{u_0 \mid \phi^n(u_0) \to r\}$.

Illustration.
La question de convergence de $\phi^n(u_0)$ donne lieu à de jolies images fractales !

Vous voyez ici les bassins d'attraction des trois racines complexes du polynôme $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^3 - 1$.



Bassin de super-attraction

Théorème (bassin de super-attraction)

Soit f *une fonction de classe* C^2*. Supposons que* $f(r) = 0$ *ainsi que* $|f'| \geq m > 0$ *et* $|f''| \leq M$ *sur* $\bar{B}(r, \eta)$*. On pose* $\varepsilon := \min(\eta, \frac{m}{M}) > 0$*.*

Bassin de super-attraction

Théorème (bassin de super-attraction)

Soit f *une fonction de classe* C^2*. Supposons que* $f(r) = 0$ *ainsi que* $|f'| \geq m > 0$ *et* $|f''| \leq M$ *sur* $\bar{B}(r, \eta)$*. On pose* $\varepsilon := \min(\eta, \frac{m}{M}) > 0$*.*

Alors pour toute valeur initiale $u_0 \in \bar{B}(r, \varepsilon)$ *la suite de Newton* $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ *converge vers* r *à une vitesse quadratique :*

$$|u_n - r| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^n - 1} \cdot |u_0 - r|.$$

Bassin de super-attraction

Théorème (bassin de super-attraction)

Soit f *une fonction de classe* C^2*. Supposons que* $f(r) = 0$ *ainsi que* $|f'| \geq m > 0$ *et* $|f''| \leq M$ *sur* $\bar{B}(r, \eta)$*. On pose* $\varepsilon := \min(\eta, \frac{m}{M}) > 0$*.*

Alors pour toute valeur initiale $u_0 \in \bar{B}(r, \varepsilon)$ *la suite de Newton* $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ *converge vers* r *à une vitesse quadratique :*

$$|u_n - r| \;\leq\; \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^n - 1} \cdot |u_0 - r|.$$

Notation :

Bassin de super-attraction

Théorème (bassin de super-attraction)

Soit f une fonction de classe C^2. Supposons que $f(r) = 0$ ainsi que $|f'| \geq m > 0$ et $|f''| \leq M$ sur $\bar{B}(r, \eta)$. On pose $\varepsilon := \min(\eta, \frac{m}{M}) > 0$.

Alors pour toute valeur initiale $u_0 \in \bar{B}(r, \varepsilon)$ la suite de Newton $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ converge vers r à une vitesse quadratique :

$$|u_n - r| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^n - 1} \cdot |u_0 - r|.$$

Notation :
boule ouverte $B(a, \rho) := \{x \mid |x - a| < \rho\}$,

Bassin de super-attraction

Théorème (bassin de super-attraction)

Soit f *une fonction de classe* C^2*. Supposons que* $f(r) = 0$ *ainsi que* $|f'| \geq m > 0$ *et* $|f''| \leq M$ *sur* $\bar{B}(r, \eta)$*. On pose* $\varepsilon := \min(\eta, \frac{m}{M}) > 0$*.*

Alors pour toute valeur initiale $u_0 \in \bar{B}(r, \varepsilon)$ *la suite de Newton* $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ *converge vers* r *à une vitesse quadratique :*

$$|u_n - r| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^n - 1} \cdot |u_0 - r|.$$

Notation :

boule ouverte $B(a, \rho) := \{x \mid |x - a| < \rho\}$,

boule fermée $\bar{B}(a, \rho) := \{x \mid |x - a| \leq \rho\}$.

Bassin de super-attraction

Théorème (bassin de super-attraction)

Soit f une fonction de classe C^2. Supposons que $f(r) = 0$ ainsi que $|f'| \geq m > 0$ et $|f''| \leq M$ sur $\bar{B}(r, \eta)$. On pose $\varepsilon := \min(\eta, \frac{m}{M}) > 0$.

Alors pour toute valeur initiale $u_0 \in \bar{B}(r, \varepsilon)$ la suite de Newton $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ converge vers r à une vitesse quadratique :

$$|u_n - r| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^n - 1} \cdot |u_0 - r|.$$

Notation :
boule ouverte $B(a, \rho) := \{x \mid |x - a| < \rho\}$,
boule fermée $\bar{B}(a, \rho) := \{x \mid |x - a| \leq \rho\}$.

Dans $\mathbb{R}$ on a bien sûr

Bassin de super-attraction

Théorème (bassin de super-attraction)

Soit f une fonction de classe C^2. Supposons que $f(r) = 0$ ainsi que $|f'| \geq m > 0$ et $|f''| \leq M$ sur $\bar{B}(r, \eta)$. On pose $\varepsilon := \min(\eta, \frac{m}{M}) > 0$.

Alors pour toute valeur initiale $u_0 \in \bar{B}(r, \varepsilon)$ la suite de Newton $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ converge vers r à une vitesse quadratique :

$$|u_n - r| \;\leq\; \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^n - 1} \cdot |u_0 - r|.$$

Notation :
boule ouverte $B(a, \rho) := \{x \mid |x - a| < \rho\}$,
boule fermée $\bar{B}(a, \rho) := \{x \mid |x - a| \leq \rho\}$.

Dans $\mathbb{R}$ on a bien sûr
$B(a, \rho) =]a - \rho, a + \rho[$ et

Bassin de super-attraction

Théorème (bassin de super-attraction)

Soit f une fonction de classe C^2. Supposons que $f(r) = 0$ ainsi que $|f'| \geq m > 0$ et $|f''| \leq M$ sur $\bar{B}(r, \eta)$. On pose $\varepsilon := \min(\eta, \frac{m}{M}) > 0$.

Alors pour toute valeur initiale $u_0 \in \bar{B}(r, \varepsilon)$ la suite de Newton $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ converge vers r à une vitesse quadratique :

$$|u_n - r| \;\leq\; \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^n - 1} \cdot |u_0 - r|.$$

Notation :
boule ouverte $B(a, \rho) := \{x \mid |x - a| < \rho\}$,
boule fermée $\bar{B}(a, \rho) := \{x \mid |x - a| \leq \rho\}$.

Dans $\mathbb{R}$ on a bien sûr
$B(a, \rho) =]a - \rho, a + \rho[$ et
$\bar{B}(a, \rho) = [a - \rho, a + \rho]$.

Bassin de super-attraction

Théorème (bassin de super-attraction)

Soit f une fonction de classe C^2. Supposons que $f(r) = 0$ ainsi que $|f'| \geq m > 0$ et $|f''| \leq M$ sur $\bar{B}(r, \eta)$. On pose $\varepsilon := \min(\eta, \frac{m}{M}) > 0$.

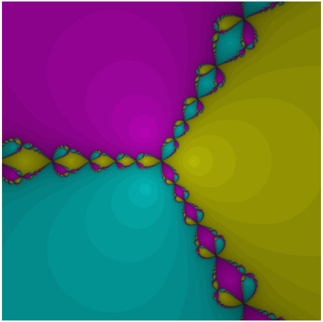
Alors pour toute valeur initiale $u_0 \in \bar{B}(r, \varepsilon)$ la suite de Newton $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ converge vers r à une vitesse quadratique :

$$|u_n - r| \ \leq \ \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^n - 1} \cdot |u_0 - r|.$$

Notation :
boule ouverte $B(a, \rho) := \{x \mid |x - a| < \rho\}$,
boule fermée $\bar{B}(a, \rho) := \{x \mid |x - a| \leq \rho\}$.

Dans $\mathbb{R}$ on a bien sûr
$B(a, \rho) = \,]a - \rho, a + \rho[$ et
$\bar{B}(a, \rho) = [a - \rho, a + \rho]$.

Généralisation :
Le théorème et sa preuve
se généralisent de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ et à $\mathbb{R}^n$.



Un critère local de convergence

Étant donné f et une valeur initiale u_0, comment savoir si l'itération de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ convergera ?

Un critère local de convergence

Étant donné f et une valeur initiale u_0, comment savoir si l'itération de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ convergera ?

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Un critère local de convergence

Étant donné f et une valeur initiale u_0, comment savoir si l'itération de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ convergera ?

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Un critère local de convergence

Étant donné f et une valeur initiale u_0, comment savoir si l'itération de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ convergera ?

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta := |u_1 - u_0| = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

Un critère local de convergence

Étant donné f et une valeur initiale u_0, comment savoir si l'itération de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ convergera ?

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta := |u_1 - u_0| = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

Supposons que f est définie sur $V := \bar{B}(u_0, 2\eta)$ et vérifie

$$\frac{|f''(x)|}{|f'(x)|} \leq \frac{1}{8\eta} \qquad \text{pour tout } x \in V.$$

Un critère local de convergence

Étant donné f et une valeur initiale u_0, comment savoir si l'itération de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ convergera ?

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta := |u_1 - u_0| = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

Supposons que f est définie sur $V := \bar{B}(u_0, 2\eta)$ et vérifie

$$\frac{|f''(x)|}{|f'(x)|} \leq \frac{1}{8\eta} \qquad \text{pour tout } x \in V.$$

Alors $\phi|_V$ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$ et vérifie $\phi(V) \subset V$.

Un critère local de convergence

Étant donné f et une valeur initiale u_0, comment savoir si l'itération de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ convergera ?

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta := |u_1 - u_0| = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

Supposons que f est définie sur $V := \bar{B}(u_0, 2\eta)$ et vérifie

$$\frac{|f''(x)|}{|f'(x)|} \leq \frac{1}{8\eta} \qquad \text{pour tout } x \in V.$$

Alors $\phi|_V$ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$ et vérifie $\phi(V) \subset V$.

Par conséquent $f|_V$ admet une unique racine $r \in V$, $f(r) = 0$,

Un critère local de convergence

Étant donné f et une valeur initiale u_0, comment savoir si l'itération de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ convergera ?

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta := |u_1 - u_0| = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

Supposons que f est définie sur $V := \bar{B}(u_0, 2\eta)$ et vérifie

$$\frac{|f''(x)|}{|f'(x)|} \leq \frac{1}{8\eta} \qquad \text{pour tout } x \in V.$$

Alors $\phi|_V$ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$ et vérifie $\phi(V) \subset V$.

Par conséquent $f|_V$ admet une unique racine $r \in V$, $f(r) = 0$,

et la suite itérative $u_n = \phi^n(u_0)$ converge vers r.

Un critère local de convergence

Étant donné f et une valeur initiale u_0, comment savoir si l'itération de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ convergera ?

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta := |u_1 - u_0| = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

Supposons que f est définie sur $V := \bar{B}(u_0, 2\eta)$ et vérifie

$$\frac{|f''(x)|}{|f'(x)|} \leq \frac{1}{8\eta} \qquad \text{pour tout } x \in V.$$

Alors $\phi|_V$ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$ et vérifie $\phi(V) \subset V$.

Par conséquent $f|_V$ admet une unique racine $r \in V$, $f(r) = 0$, et la suite itérative $u_n = \phi^n(u_0)$ converge vers r.

- Finalement la vitesse de convergence sera quadratique.

Un critère local de convergence

Étant donné f et une valeur initiale u_0, comment savoir si l'itération de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ convergera ?

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta := |u_1 - u_0| = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

Supposons que f est définie sur $V := \bar{B}(u_0, 2\eta)$ et vérifie

$$\frac{|f''(x)|}{|f'(x)|} \leq \frac{1}{8\eta} \qquad \text{pour tout } x \in V.$$

Alors $\phi|_V$ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$ et vérifie $\phi(V) \subset V$.

Par conséquent $f|_V$ admet une unique racine $r \in V$, $f(r) = 0$, et la suite itérative $u_n = \phi^n(u_0)$ converge vers r.

- Finalement la vitesse de convergence sera quadratique.
- Le théorème et sa preuve se généralisent de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ et à $\mathbb{R}^n$.

Un critère localisé en un seul point

Le critère suivant se passe de l'étude de f dans un voisinage de u_0 :
il repose uniquement sur les dérivées de f en u_0.

Un critère localisé en un seul point

Le critère suivant se passe de l'étude de f dans un voisinage de u_0 : il repose uniquement sur les dérivées de f en u_0.

Théorème (Smale, 1986)

Soit f une fonction analytique. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Un critère localisé en un seul point

Le critère suivant se passe de l'étude de f dans un voisinage de u_0 : il repose uniquement sur les dérivées de f en u_0.

Théorème (Smale, 1986)

Soit f une fonction analytique. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Un critère localisé en un seul point

Le critère suivant se passe de l'étude de f dans un voisinage de u_0 : il repose uniquement sur les dérivées de f en u_0.

Théorème (Smale, 1986)

Soit f une fonction analytique. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

Un critère localisé en un seul point

Le critère suivant se passe de l'étude de f dans un voisinage de u_0 : il repose uniquement sur les dérivées de f en u_0.

Théorème (Smale, 1986)

Soit f une fonction analytique. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

On suppose que $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-u_0)^k$ pour tout $z \in B(u_0, 2\eta)$. Si

$$|a_k| \leq (8\eta)^{1-k} |a_1| \quad \textit{pour tout} \quad k \geq 2,$$

Un critère localisé en un seul point

Le critère suivant se passe de l'étude de f dans un voisinage de u_0 : il repose uniquement sur les dérivées de f en u_0.

Théorème (Smale, 1986)

Soit f une fonction analytique. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

On suppose que $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - u_0)^k$ pour tout $z \in B(u_0, 2\eta)$. Si

$$|a_k| \leq (8\eta)^{1-k} |a_1| \quad \text{pour tout} \quad k \geq 2,$$

alors f admet une unique racine r dans la boule $B(u_0, 2\eta)$

Un critère localisé en un seul point

Le critère suivant se passe de l'étude de f dans un voisinage de u_0 : il repose uniquement sur les dérivées de f en u_0.

Théorème (Smale, 1986)

Soit f une fonction analytique. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

On suppose que $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - u_0)^k$ pour tout $z \in B(u_0, 2\eta)$. Si

$$|a_k| \leq (8\eta)^{1-k} |a_1| \quad \textit{pour tout} \quad k \geq 2,$$

alors f admet une unique racine r dans la boule $B(u_0, 2\eta)$ et la suite de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ converge quadratiquement vers r :

$$|u_n - r| \leq (\tfrac{1}{2})^{2^n - 1} \cdot |u_0 - r|.$$

Un critère localisé en un seul point

Le critère suivant se passe de l'étude de f dans un voisinage de u_0 : il repose uniquement sur les dérivées de f en u_0.

Théorème (Smale, 1986)

Soit f une fonction analytique. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

On suppose que $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - u_0)^k$ pour tout $z \in B(u_0, 2\eta)$. Si

$$|a_k| \leq (8\eta)^{1-k} |a_1| \quad \text{pour tout} \quad k \geq 2,$$

alors f admet une unique racine r dans la boule $B(u_0, 2\eta)$ et la suite de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ converge quadratiquement vers r :

$$|u_n - r| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^n - 1} \cdot |u_0 - r|.$$

- Ce théorème s'applique particulièrement bien aux polynômes.

Un critère localisé en un seul point

Le critère suivant se passe de l'étude de f dans un voisinage de u_0 : il repose uniquement sur les dérivées de f en u_0.

Théorème (Smale, 1986)

Soit f une fonction analytique. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

On suppose que $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - u_0)^k$ pour tout $z \in B(u_0, 2\eta)$. Si

$$|a_k| \leq (8\eta)^{1-k} |a_1| \quad \textit{pour tout} \quad k \geq 2,$$

alors f admet une unique racine r dans la boule $B(u_0, 2\eta)$ et la suite de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ converge quadratiquement vers r :

$$|u_n - r| \leq (\tfrac{1}{2})^{2^n - 1} \cdot |u_0 - r|.$$

Ce théorème s'applique particulièrement bien aux polynômes.

Pour une preuve voir Blum & Cucker & Shub & Smale : *Complexity and Real Computation*, Springer, New York 1998, chap. 8.

Résumé

1. Systèmes dynamiques et points fixes
   - Suites itératives, convergence, points fixes
   - Approximation de racines d’après Newton–Héron
   - Instabilité numérique : l’effet papillon
   - Dynamique locale autour d’un point fixe
2. Le théorème du point fixe de Banach
   - Fonctions contractantes
   - Le théorème du point fixe de Banach
   - Démonstration du théorème
   - Avertissements et généralisations
3. La méthode de Newton
   - Points fixes super-attractifs
   - L’idée et la formule de Newton
   - Fonctions convexes et convergence monotone
   - Critères de convergence, bassin d’attraction