

Mathématiques assistées par ordinateur

Chapitre 6 : Méthodes itératives

Michael Eisermann

Mat249, DLST L2S4, Année 2008-2009

www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm/cours#mao

Document mis à jour le 6 juillet 2009



Objectifs de ce chapitre

L'itération est une technique omniprésente car souple et puissante :

- On part d'une approximation u_n qui n'est pas trop grossière.
- On construit une meilleure approximation $u_{n+1} = f(u_n)$.

Ce procédé est itéré dans l'espoir de converger vers une solution.

Bien sûr, la réussite de ce procédé dépend fortement de la fonction à itérer et du point de départ. Ceci mérite une étude détaillée !

Ce chapitre présente d'abord des exemples et un vocabulaire adéquat. Ensuite nous établissons deux résultats fondamentaux :

- 1 Le théorème de Banach pour les fonctions contractantes.
- 2 La méthode de Newton pour les fonctions dérivables.

Ce sont des méthodes très puissantes. Pour bien les appliquer il faut comprendre les critères garantissant leur convergence.

Ce cours œuvre pour rendre les résultats mathématiques **explicites**, **pratiques**, **efficaces**, pour qu'ils soient « prêt-à-programmer ».

Sommaire

- 1 Systèmes dynamiques et points fixes
 - Suites itératives, convergence, points fixes
 - Approximation de racines d'après Newton–Héron
 - Instabilité numérique : l'effet papillon
 - Dynamique locale autour d'un point fixe
- 2 Le théorème du point fixe de Banach
 - Fonctions contractantes
 - Le théorème du point fixe de Banach
 - Démonstration du théorème
 - Avertissements et généralisations
- 3 La méthode de Newton
 - Points fixes super-attractifs
 - L'idée et la formule de Newton
 - Fonctions convexes et convergence monotone
 - Critères de convergence, bassin d'attraction

Convergence d'une suite numérique (rappel)

La notion de convergence sera fondamentale dans toute la suite.

Définition (convergence)

Une **suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R} est une application $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R} **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Exemple

Pour $|k| < 1$ la suite géométrique k^n converge vers 0.

Exemple

Soit $u_0 = 0$ puis $u_{n+1} = \frac{9+u_n}{10}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0.9, \quad u_2 = 0.99, \quad u_3 = 0.999, \quad u_4 = 0.9999, \quad \dots$$

Cette suite converge vers 1, car $|u_n - 1| = (\frac{1}{10})^n \rightarrow 0$. (Exercice)

Ici on **itère** la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{9+x}{10}$.

La limite 1 est un **point fixe** car $f(1) = 1$ et il s'avère **attractif**.

Suites itératives

Définition (suite itérative)

On considère une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$. Ceci définit la suite itérative $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Écriture alternative : $u_n = f^n(u_0)$ où $f^n = f \circ \dots \circ f$ (n termes).

Questions importantes :

- 1 Quel est le comportement de la suite u_n ?
Converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite ?
- 2 Stabilité : une petite variation des données initiales mène-t-elle à une petite variation des résultats ? Ou est-ce chaotique ?
- 3 Si la suite u_n converge, converge-t-elle rapidement ?
Combien d'itérations faut-il pour une précision donnée ?

Observation (limites et points fixes)

Si f est continue et u_n converge vers ℓ , alors ℓ est un point fixe de f .

Démonstration. $f(\ell) = f(\lim u_n) = \lim f(u_n) = \lim u_{n+1} = \ell$. □

Convergence linéaire

Exemple (convergence linéaire à la Banach)

On itère $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{2x+2}{x+2}$, à partir de $u_0 = 2$.

Point fixe ? $f(x) = x \Leftrightarrow 2x + 2 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 = 2$.
D'après notre observation : si u_n converge, alors la limite est $\sqrt{2}$.

Calcul des premiers termes :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{3}{2} && = \underline{1.5000000000} \\ u_2 &= \frac{10}{7} && = \underline{1.42857142857\dots} \\ u_3 &= \frac{17}{12} && = \underline{1.4166666666\dots} \\ u_4 &= \frac{58}{41} && = \underline{1.41463414634\dots} \\ u_5 &= \frac{99}{70} && = \underline{1.41428571428\dots} \\ &\dots && \dots \\ u_{10} &= \frac{11482}{8119} && = \underline{1.41421357310\dots} \\ u_{11} &= \frac{19601}{13860} && = \underline{1.41421356421\dots} \end{aligned}$$

Empiriquement, le nombre de décimales valables croît linéairement avec le nombre d'itérations. Il nous faudra encore une preuve !

Approximation de racines d'après Newton–Héron

Proposition (rappel)

Pour tout $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que $r^n = a$. Ainsi on définit la racine n ième $\sqrt[n]{a} := r$.

Question : Comment approcher $\sqrt[n]{a}$ efficacement ?

Théorème (Newton–Héron, version qualitative)

Pour toute valeur initiale $u_0 > 0$ la suite itérative

$$u_{k+1} = \frac{1}{n} \left[(n-1)u_k + \frac{a}{u_k^{n-1}} \right]$$

converge vers la racine $r := \sqrt[n]{a}$.

Avantage important : la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est facilement calculable !
Les quatre opérations arithmétiques $+$, $-$, $*$, $/$ suffisent.

Questions pratiques : Quelle est la vitesse de la convergence ?
Comment mesurer la qualité de l'approximation, $|u_k - r|$?

Approximation de racines (suite)

Théorème (Newton–Héron, version quantitative)

Soit $a > 0$ et $r := \sqrt[n]{a}$. Pour toute valeur initiale $u_0 > 0$ les suites

$$u_k = \frac{1}{n} \left[(n-1)u_{k-1} + \frac{a}{u_{k-1}^{n-1}} \right] \quad \text{et} \quad v_k = a/u_k^{n-1}$$

donnent des encadrements $v_k \leq r \leq u_k$ de plus en plus fins :

$$v_1 \leq v_2 \leq v_3 \leq \dots \leq r \leq \dots \leq u_3 \leq u_2 \leq u_1$$

En particulier $|u_k - v_k|$ permet de majorer l'erreur d'approximation.

Quant à la vitesse de convergence, l'erreur relative $\varepsilon_k = \frac{u_k - r}{r}$ vérifie

$$\varepsilon_{k+1} \leq \min \left\{ \frac{n-1}{n} \varepsilon_k, \frac{n-1}{2} \varepsilon_k^2 \right\}.$$

⇒ Initialement, pour u_k loin de r , la progression est au moins linéaire : $\varepsilon_{k+1} \leq \frac{n-1}{n} \varepsilon_k$ avec un rapport de contraction $\frac{n-1}{n} < 1$.

⇒ Finalement, pour u_k proche de r , la convergence est quadratique : $\varepsilon_{k+1} \leq \frac{n-1}{2} \varepsilon_k^2$.

Exemples numériques

Approximation de $r = \sqrt{2}$ à partir de $u_0 = 1$:

$$\underline{1.3333333333} \leq r \leq \underline{1.5000000000}$$

$$\underline{1.4117647058} \leq r \leq \underline{1.4166666667}$$

$$\underline{1.4142114384} \leq r \leq \underline{1.4142156863}$$

$$\underline{1.4142135623} \leq r \leq \underline{1.4142135624}$$

Approximation de $r = \sqrt[3]{10}$ à partir de $u_0 = 1$:

$$0.6250000000000000 \leq r \leq 4.0000000000000000$$

$$1.2098298676748582 \leq r \leq 2.8750000000000000$$

$$1.8579980870834728 \leq r \leq 2.3199432892249528$$

$$\underline{2.1315646651045386} \leq r \leq \underline{2.1659615551777928}$$

$$\underline{2.1543122250101293} \leq r \leq \underline{2.1544959251533748}$$

$$\underline{2.1544346865510652} \leq r \leq \underline{2.1544346917722930}$$

$$\underline{2.1544346900318837} \leq r \leq \underline{2.1544346900318838}$$



Peu d'itérations suffisent pour garantir une précision satisfaisante.

Preuve de la méthode de Newton–Héron

Démonstration. (Cette esquisse est à détailler à titre d'exercice)

On étudie $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par $\phi(x) = \frac{1}{n} [(n-1)x + a/x^{n-1}]$.

Cette fonction est dérivable et $\phi'(x) = \frac{n-1}{n}(1 - a/x^n)$.

Point fixe : $\phi(x) = x \Leftrightarrow (n-1)x + a/x^{n-1} = nx \Leftrightarrow x^n = a$

Variations : La dérivée $\phi'(x)$ s'annule en $x = r$.

Pour $x < r$ on a $\phi'(x) < 0$, donc ϕ décroît sur $]0, r[$.

Pour $x > r$ on a $\phi'(x) > 0$, donc ϕ croît sur $[r, \infty[$.

Itération : Quelque soit $u_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, on a $u_k \geq r$ pour $k \geq 1$.

Pour $x \geq r$ on a $0 \leq \phi'(x) \leq \frac{n-1}{n}$, donc ϕ est contractante sur $[r, \infty[$:

On trouve $|\phi(x) - r| = |\phi(x) - \phi(r)| \leq |\phi'(\xi)| \cdot |x - r| \leq \frac{n-1}{n}|x - r|$.

Ceci montre que $|\phi^k(x) - r| \leq (\frac{n-1}{n})^k \cdot |x - r| \rightarrow 0$.

Vitesse de convergence : On pose $\varepsilon_k := \frac{u_k - r}{r}$ càd $u_k = (1 + \varepsilon_k)r$.

On trouve $\varepsilon_{k+1} = g(\varepsilon_k)$ avec $g(\varepsilon) = \frac{n-1}{n}\varepsilon + \frac{1}{n} [(1 + \varepsilon)^{1-n} - 1]$.

La fonction g est majorée par $h(\varepsilon) = \frac{n-1}{2}\varepsilon^2$: on trouve

$g(0) = h(0) = 0$ et $g'(0) = h'(0) = 0$ ainsi que $g'' \leq h'' = n - 1$.

La majoration $g(\varepsilon_{k+1}) \leq \frac{n-1}{2}\varepsilon_k^2$ assure la convergence quadratique.

L'effet papillon : instabilité numérique

La récurrence de Fibonacci est définie par $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.

Exemple
stable

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	1.00	1.00	2.00	3.00	5.00	8.00	13.00	21.00	34.00	55.00	89.00
x'_n	1.00	1.01	2.01	3.02	5.03	8.05	13.08	21.13	34.21	55.34	89.55

Définition (stabilité numérique, formulation heuristique)

Un calcul est **stable** si des petits changements des données initiales n'entraînent que des petits changements des résultats finaux.

Exemple
instable

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	1.000	-0.618	0.382	-0.236	0.146	-0.090	0.056
x'_n	1.000	-0.619	0.381	-0.238	0.143	-0.095	0.048

n	7	8	9	10	...	20	...	30	...
x_n	-0.034	0.022	-0.012	0.010		0.230		28.280	
x'_n	-0.047	0.001	-0.046	-0.045		-6.535		-803.760	

Avertissement (calcul instable)

Des petites erreurs peuvent se propager, s'amplifier, et finalement entraîner une erreur considérable au cours de quelques itérations.

Excursion : mécanique céleste d'après Newton

La mécanique céleste est un système dynamique célèbre.

On considère N objets célestes, ici numérotés $i = 1, \dots, N$.

À l'instant $t = 0$ on connaît leur position $x_i(0)$ et leur vitesse $v_i(0)$.

Système dynamique différentiel

D'après Newton on a $x'_i(t) = v_i(t)$ et $v'_i(t) = \sum_{j \neq i} \gamma m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}$.

On peut approcher ce système en passant du temps continue $t \in \mathbb{R}$ à un temps discret $t \in \mathbb{Z} \cdot \Delta t$ avec un pas $\Delta t \in \mathbb{R}_{>0}$ assez petit.

Heuristiquement $x'_i(t) \approx \frac{x_i(t+\Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}$ et $v'_i(t) \approx \frac{v_i(t+\Delta t) - v_i(t)}{\Delta t}$.

Système dynamique discret

On pose $x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + \Delta t \cdot v_i(t)$ et
 $v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + \Delta t \cdot \sum_{j \neq i} \gamma m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}$

C'est l'itération d'une fonction $\Phi: \mathbb{R}^{6N} \setminus \{x_i = x_j\} \rightarrow \mathbb{R}^{6N}$.

On espère que le modèle discret approche le modèle différentiel.

Ceci donne lieu à des études expérimentales et théoriques !

Dynamique locale autour d'un point fixe

Exemple (cas linéaire)

On considère une fonction linéaire $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = kx$ avec une constante $k \in \mathbb{R}$. Évidemment elle admet $a = 0$ pour point fixe.

Deux phénomènes peuvent se produire :

- Si $|k| < 1$, par exemple $k = \frac{1}{2}$, alors

$$|f^n(u_0) - a| = |k|^n \cdot |u_0 - a| \rightarrow 0.$$

On dit que a est un point fixe **attractif** ou **stable**.

- Si $|k| > 1$, par exemple $k = 2$, alors

$$|f^n(u_0) - a| = |k|^n \cdot |u_0 - a| \rightarrow \infty.$$

On dit que a est un point fixe **répulsif** ou **instable**.

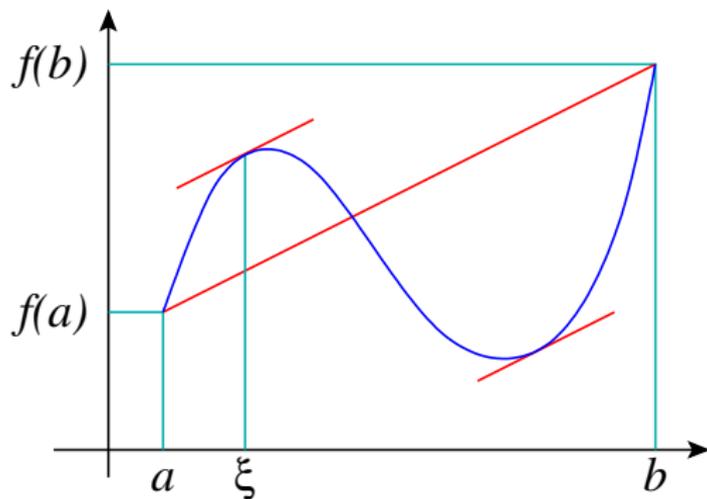
- Si $|k| = 1$: pour $f = \text{id}$ tous les points sont fixés, pour $f = -\text{id}$ la suite $u_n = (-1)^n u_0$ oscille.

Passons maintenant aux fonctions dérivables...

Rappel : le théorème des accroissements finis

Théorème (des accroissements finis, TAF)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Autrement dit, $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Ou encore $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$.

C'est Taylor–Lagrange à l'ordre 0.

Dynamique autour d'un point fixe attractif

Proposition

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable et soit $a = f(a)$ un point fixe. Si $|f'(a)| < 1$ alors a est un point fixe **attractif**.

Démonstration. On peut choisir $k \in \mathbb{R}$ telle que $|f'(a)| < k < 1$.

La continuité de f' assure l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(\xi)| \leq k$ pour tout ξ dans le voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

On applique le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in V$ il existe un ξ entre a et x tel que $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$, donc

$$|f(x) - a| = |f(x) - f(a)| = |f'(\xi)(x - a)| \leq k|x - a|.$$

Ainsi les images itérées de $x \in V$ convergent vers a :

$$|f^n(x) - a| \leq k^n|x - a| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, a est un point fixe attractif. □

Dynamique autour d'un point fixe répulsif

Proposition

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable et soit $a = f(a)$ un point fixe. Si $|f'(a)| > 1$ alors a est un point fixe **répulsif**.

Démonstration. On peut choisir $k \in \mathbb{R}$ telle que $|f'(a)| > k > 1$.

La continuité de f' assure l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(\xi)| \geq k$ pour tout ξ dans le voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

On applique le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in V$ il existe un ξ entre a et x tel que $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$, donc

$$|f(x) - a| = |f(x) - f(a)| = |f'(\xi)(x - a)| \geq k|x - a|.$$

Ainsi les images itérées de $x \in V \setminus \{a\}$ s'éloignent de a :

$$|f^n(x) - a| \geq k^n|x - a|, \quad \text{puis ils sortent du voisinage } V.$$

Autrement dit, a est un point fixe répulsif. □

Dynamique autour d'un point fixe douteux

Remarque

Le cas d'un point fixe a avec $|f'(a)| = 1$ est douteux.

Dans ce cas une analyse plus fine s'impose. Exemples typiques :

- Pour $f(x) = x - x^3$ le point fixe 0 est attractif.
- Pour $f(x) = x + x^3$ le point fixe 0 est répulsif.
- Pour $f(x) = x + x^2$ il est attractif à gauche mais répulsif à droite.
- Pour $f(x) = x - x^2$ il est attractif à droite mais répulsif à gauche.

Remarque

En dimension ≥ 2 la situation est plus compliquée !

Reconsidérons le cas d'une application linéaire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Si $|\lambda|, |\mu| < 1$, le point fixe 0 est attractif. Si $|\lambda|, |\mu| > 1$, il est répulsif.

Si $|\lambda| < 1 < |\mu|$, il existe une direction stable et une direction instable.

Objectif : la méthode de point fixe de Banach

Nous venons de discuter les suites itératives en toute généralité et la dynamique locale autour d'un point fixe (attractif ou répulsif).

Notre prochain objectif est d'établir des résultats globaux : le théorème du point fixe de Banach assure, sous certaines conditions assez générales, *l'existence* et *l'unicité* d'un point fixe.

Soulignons qu'il s'agit, fort heureusement, d'un point fixe attractif et que le théorème fournit une méthode itérative pour l'approcher. Cette méthode est numériquement stable et évite donc l'effet papillon.

Remarque préliminaire : existence de points fixes

Théorème (de point fixe de Brouwer en dimension 1)

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. Alors il existe (au moins) un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a, b]$ vérifiant $f(x) = x$.

Considérons la fonction auxiliaire

$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$.

Les points fixes de f sont les zéros de g .

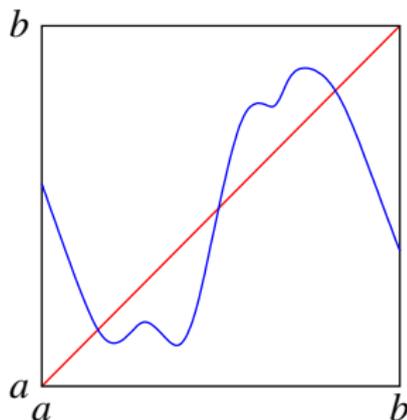
On a $f(a) \geq a$, donc $g(a) \geq 0$.

On a $f(b) \leq b$, donc $g(b) \leq 0$.

TVI \implies Il existe $x \in [a, b]$ vérifiant $g(x) = 0$.

◊ On peut l'approcher par dichotomie.

⚠ Il peut y avoir plusieurs points fixes.



Outre la continuité de f , l'intervalle $[a, b]$ joue un rôle primordial :

- L'énoncé est faux sur \mathbb{R} , par exemple $f(x) = x + 1$.
- L'énoncé est faux sur $]0, 1[$, par exemple $f(x) = x^2$.
- L'énoncé est faux sur $[-2, -1] \cup [1, 2]$, par exemple $f(x) = -x$.

Fonctions contractantes

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou \mathbb{R} .

Définition (fonction contractante)

On dit que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est **contractante** de rapport k où $0 \leq k < 1$ si $|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$ pour tout $x, y \in I$.

Autrement dit, la fonction f est contractante si elle rapproche les points, d'un rapport $k < 1$ fixé d'avance.

Proposition (critère pratique)

*Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable tel que $|f'(\xi)| \leq k$ pour tout $\xi \in I$.
Si $k < 1$ alors f est contractante de rapport k .*

Démonstration. Soit $x, y \in I$. Par le théorème des accroissements fini on a $f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y)$ pour un ξ entre x et y .
On conclut que $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq k|x - y|$. □

Le théorème du point fixe de Banach

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé : $[x_1, x_2]$ ou $[x_1, +\infty[$ ou $]-\infty, x_2]$ ou \mathbb{R} .

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction contractante de rapport $k < 1$. Alors :

- 1 Il existe un et un seul point $a \in I$ vérifiant $f(a) = a$.
- 2 Pour tout $u_0 \in I$ la suite itérative $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a .
- 3 On a $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$, la convergence vers a est donc au moins aussi rapide que celle de la suite géométrique k^n vers 0.
- 4 Pour contrôler l'approximation on a l'estimation de l'écart

$$|u_n - a| \leq \frac{k}{1-k} \cdot |u_n - u_{n-1}|.$$

On ignore souvent la limite a mais on peut facilement calculer la suite itérative u_n : c'est elle qui permet d'approcher la valeur cherchée a .

Pour contrôler la qualité de l'approximation u_n , on majore l'écart $|u_n - a|$ entre u_n et la limite inconnue par la quantité $\frac{k}{1-k} |u_n - u_{n-1}|$.



Tout est parfaitement explicite et immédiatement calculable.

Exemple d'application (1/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

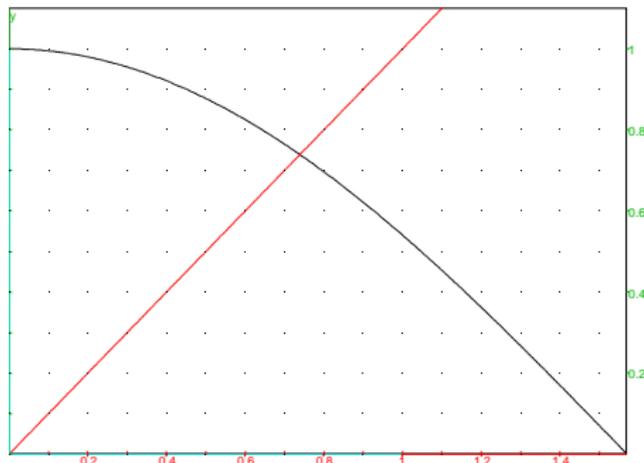
Pour appliquer le théorème du point fixe, il faut d'abord trouver un intervalle I sur lequel $f(x) = \cos(x)$ satisfasse aux hypothèses :

$$f(I) \subset I \quad \text{et} \quad f|_I: I \rightarrow I \quad \text{est contractante.}$$

Un dessin aidera !

```
plot([x, cos(x)], x=0..pi/2)
```

On voit qu'une solution
se trouve dans $[0.6, 0.8]$



Exemple d'application (2/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Pour $f(x) = \cos(x)$ essayons l'intervalle $I = [0.6, 0.8]$:

- On a $f(0.6) = 0.825\dots > 0.8$, donc $f(I) \not\subset I$.
Ainsi f ne se restreint pas à $f: I \rightarrow I$.

Essayons l'intervalle $I = [0, \pi/2]$:

- On a $f(I) = [0, 1] \subset I$, donc c'est bon.
- On a $f'(x) = -\sin(x)$, donc $-1 \leq f' \leq 0$.

Malheureusement $|f'(\pi/2)| = 1$, donc $f|_I$ n'est pas contractante.



Le théorème ne s'applique pas bêtement :
Il faut bien choisir l'intervalle puis vérifier les hypothèses.

Exemple d'application (3/3)

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x = \cos(x)$.

Essayons l'intervalle $I = [0, 1]$:

- On a $f'(x) = -\sin(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$,
donc f décroît de $f(0) = 1$ à $f(1) = 0.5403\dots > 0.5$.
On conclut que $f(I) \subset [0.5, 1] \subset I$.
- On a $f''(x) = -\cos(x) < 0$ sur $[0, 1]$,
donc f' décroît de $f'(0) = 0$ à $f'(1) = -0.8414\dots > -0.85$.
On conclut que $|f'| \leq 0.85 =: k$ sur I .

On peut donc appliquer le théorème. Pour $u_0 = 1$ on obtient la suite

$$\begin{aligned}u_1 &= 0.5403023058\dots & u_9 &= 0.7314040424\dots & u_{19} &= 0.7389377567\dots \\u_2 &= 0.8575532158\dots & u_{10} &= 0.7442373549\dots & u_{20} &= 0.7391843997\dots\end{aligned}$$

On trouve $|u_{20} - u_{19}| < 0.00025$ et $\frac{k}{1-k} = 5.666\dots < 6$.

On conclut que $|u_{20} - a| \leq \frac{k}{1-k}|u_{20} - u_{19}| < 0.0015$.

Démonstration du théorème (1/2)

Unicité du point fixe : Si $a = f(a)$ et $b = f(b)$,

alors $|a - b| = |f(a) - f(b)| \leq k \cdot |a - b|$ avec $k < 1$.

Autrement dit $(1 - k) \cdot |a - b| \leq 0$, avec $(1 - k) > 0$ et $|a - b| \geq 0$.

Ceci n'est possible que pour $|a - b| = 0$, donc $a = b$.

Convergence : Pour $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ on trouve

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq k|u_n - u_{n-1}| \leq \dots \leq k^n |u_1 - u_0|.$$

Par le même principe on obtient

$$\begin{aligned} |u_{n+m} - u_n| &= |u_{n+m} - u_{n+m-1} + u_{n+m-1} - \dots - u_{n+1} + u_{n+1} - u_n| \\ &\leq |u_{n+m} - u_{n+m-1}| + \dots + |u_{n+2} - u_{n+1}| + |u_{n+1} - u_n| \\ &\leq (k^{m-1} + \dots + k^1 + k^0) \cdot |u_{n+1} - u_n| = \frac{1-k^m}{1-k} |u_{n+1} - u_n| \\ &\leq \frac{1}{1-k} |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc de Cauchy et converge puisque \mathbb{R} est complet.

Démonstration du théorème (2/2)

Existence du point fixe :

On vient de prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Montrons que $a := \lim u_n$ est un point fixe de f .

Tout d'abord, on a $a \in I$ parce que l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est fermé.

Puisque f est contractante, elle est continue. Ainsi

$$f(a) = f(\lim u_n) = \lim f(u_n) = \lim u_{n+1} = a.$$

Vitesse de convergence :

Pour toute valeur initiale u_0 on a $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$, donc $u_n \rightarrow a$.

Cette inégalité montre que la convergence vers a est au moins aussi rapide que celle de la suite géométrique k^n vers 0.

Contrôle de l'approximation :

Nous avons montré que $|u_{n+m} - u_n| \leq \frac{k}{1-k} |u_n - u_{n-1}|$.

Pour $m \rightarrow \infty$ on obtient $|a - u_n| \leq \frac{k}{1-k} |u_n - u_{n-1}|$.

Avertissement : attention aux détails !

Exemple 1. $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, est contractante mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que $f([0, 1]) \not\subset [0, 1]$ et on ne peut pas itérer : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1.5$, mais u_3 n'est pas défini !

Exemple 2. $f:]0, 1] \rightarrow]0, 1]$, $f(x) = \frac{x}{2}$, est contractante et vérifie $f(]0, 1]) \subset]0, 1]$ mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que $]0, 1]$ n'est pas fermé : $\lim u_n = 0$ n'est pas contenue dans $]0, 1]$.

Exemple 3. On peut définir $f: I \rightarrow I$, $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, sur $I = [1, 2] \cap \mathbb{Q}$. La fonction f est contractante. Pour tout $u_0 \in I$ la suite itérative (u_n) converge, mais $\lim u_n = \sqrt{2}$ n'est pas contenue dans I .

Exemple 4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{1+e^x}$ vérifie $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour tout $x \neq y$, mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que f n'est pas contractante ! Pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$ on obtient $u_n \rightarrow +\infty$.

 Soulignons que la majoration $|u_n - u_{n-1}| \leq \varepsilon$ n'implique pas forcément que $|u_n - x| \leq \varepsilon$. Il faut tenir compte du facteur $\frac{k}{1-k}$!

Exemple 5. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = kx$ avec $k = 0.999999$. Elle est contractante et l'unique point fixe est 0. Les valeurs $u_0 = 100$ et $u_1 = 99.9999$ sont proches, mais encore très loin du point fixe !

Généralisation du théorème

Le théorème du point fixe est un important principe **constructif** :

- Il assure **l'existence** et **l'unicité** d'une solution.
- Il donne aussi une **méthode** pour approcher la solution.

Il se généralise de \mathbb{R} à \mathbb{R}^n voire à tout espace métrique complet.

Théorème (du point fixe, Banach 1922)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ fermé et soit $f: X \rightarrow X$ contractante de rapport $k < 1$.

Alors il existe un et un seul point $a \in X$ vérifiant $a = f(a)$.

Pour tout $u_0 \in X$ la suite itérative $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a .

On a $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$ ainsi que $|u_n - a| \leq \frac{k}{1-k} \cdot |u_n - u_{n-1}|$.

Démonstration. Notre preuve se généralise mot à mot. □



Exemple illustratif :

Plaçons une carte de Grenoble sur la table.
Existe-t-il un point sur la carte qui se trouve exactement à l'endroit qu'il désigne ?

Objectif : la méthode de point fixe de Newton

Le théorème du point fixe de Banach assure, sous certaines conditions assez générales, l'existence et l'unicité d'un point fixe.

Ce théorème fournit aussi une méthode itérative pour l'approcher. Or, la vitesse de convergence n'est en générale que linéaire.

La célèbre méthode de Newton raffine l'approche des points fixes et permet de passer des points fixes attractifs aux super-attractifs.

Ainsi on arrive à une vitesse de convergence qui est quadratique !

La construction de cette méthode et surtout ses critères de convergence nous occuperons dans le reste de ce chapitre.

Points fixes super-attractifs

Soit $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 .

Définition

Un point fixe $a = \phi(a)$ est dit **super-attractif** si $\phi'(a) = 0$.

Point fixe attractif \Rightarrow convergence linéaire :

Il existe un voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ sur lequel $|\phi'| \leq \frac{1}{2}$.

Ceci implique que $\phi|_V$ contracte de rapport $\frac{1}{2}$ et assure $\phi(V) \subset V$.

Pour tout $u_0 \in V$ la suite itérative $u_n = \phi^n(u_0)$ converge donc vers a .

Point fixe super-attractif \Rightarrow convergence quadratique :

Soit $M := \max_V |\phi''|$. Pour $x \in V$ le développement de Taylor donne

$$\phi(x) = \phi(a) + \phi'(a)(x - a) + \frac{1}{2}\phi''(\xi)(x - a)^2.$$

Ainsi $|\phi(x) - a| \leq \frac{M}{2}|x - a|^2$ ou encore $(\frac{M}{2}|\phi(x) - a|) \leq (\frac{M}{2}|x - a|)^2$.

Pour $u_n \in V$ on en déduit que $(\frac{M}{2}|\phi^m(u_n) - a|) \leq (\frac{M}{2}|u_n - a|)^{2^m}$.

Dès que $M|u_n - a| \leq 1$ ceci assure une convergence quadratique !

Le principe de la méthode de Newton

On cherche à résoudre une équation $f(x) = 0$ dans \mathbb{R} .

On peut utiliser des suites itératives et le théorème de Banach.

Comment rendre les solutions de $f(x) = 0$ super-attractives ?

Objectif

La méthode de Newton remplace l'équation $f(x) = 0$ par une équation de point fixe $\phi(x) = x$, de sorte que les zéros de f deviennent des points fixes super-attractifs de ϕ .

Ceci nous permettra des calculs extrêmement efficaces.

 Ne pas confondre l'équation initiale $f(x) = 0$ à résoudre et l'équation de point fixe $\phi(x) = x$ de la méthode de Newton.

La formule de Newton

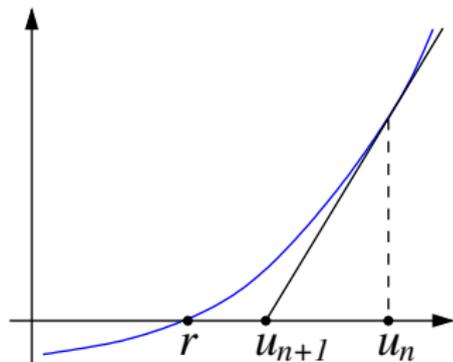
L'idée est de tirer profit du calcul différentiel, un outil très puissant !

On part d'une approximation $u_n \approx r$
d'une solution r de l'équation $f(r) = 0$.

On approche f par la tangente en u_n :

$$t(x) := f(u_n) + f'(u_n) \cdot (x - u_n).$$

C'est l'approximation de Taylor d'ordre 1.



Pour u_{n+1} on prendra l'unique solution de l'équation affine $t(x) = 0$:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Autrement dit, on itère **l'application de Newton** ϕ définie par

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Exemple : pour $f(x) = x^n - a$ la solution de $f(r) = 0$ vérifie $r^n = a$.
Ici on trouve la formule $\phi(x) = \frac{1}{n} [(n-1)x + a/x^{n-1}]$ déjà vue !

Newton est super-attractif

Définition

Soit $f: \mathbb{R} \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable.

L'application de Newton $\phi: U^* \rightarrow \mathbb{R}$ associée à f est définie par

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{sur} \quad U^* = \{x \in U \mid f'(x) \neq 0\}.$$

Proposition (Les zéros de f sont les points fixes de ϕ .)

Pour tout $r \in U^$ on a $f(r) = 0$ si et seulement si $\phi(r) = r$.*

Si f est de classe C^2 , alors tout point fixe $r = \phi(r)$ vérifie $\phi'(r) = 0$.

◆ Si l'on choisit u_0 proche d'une solution r de l'équation $f(r) = 0$, alors la suite $u_n = \phi^n(u_0)$ converge vers r de manière quadratique !

Démonstration. Évidemment $f(r) = 0 \Leftrightarrow \phi(r) = r$. Ensuite

$$\phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Ainsi $f(r) = 0$ implique $\phi(r) = r$ et $\phi'(r) = 0$. □

Newton ne converge pas toujours

Exemple classique : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$.

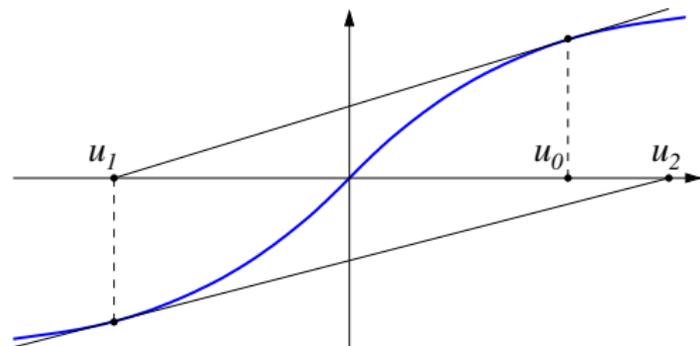
L'unique solution de l'équation $f(r) = 0$ est $r = 0$.

On a $f'(0) = 1$, donc $r = 0$ est bien une racine simple.

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - (1 + x^2) \arctan(x).$$

Pour u_0 proche de 0 on trouve $\phi^n(u_0) \rightarrow 0$, comme il faut.

À titre d'avertissement, prenons une valeur initiale u_0 loin de 0 :



$$u_0 = +1.5$$

$$u_1 = -1.6940796 \dots$$

$$u_2 = +2.3211269 \dots$$

$$u_3 = -5.1140878 \dots$$

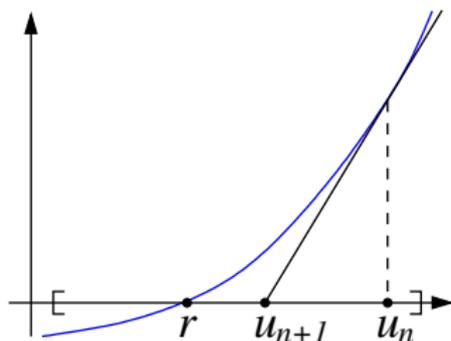
$$u_4 = +32.2956839 \dots$$

$$|u_n| \rightarrow \infty$$

Le bassin d'attraction de $r = 0$ est l'intervalle $] -a, +a[$ où a est la solution positive de $\phi(a) = -a$. Numériquement on trouve $a \approx 1.3917$.

Fonctions convexes et convergence monotone (1/2)

Reconsidérons l'itération de Newton dans la situation suivante :



Théorème (convergence monotone)

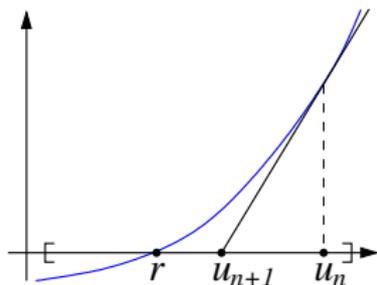
Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, vérifiant $f(a) \leq 0 < f(b)$ et $f'(a) > 0$ et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.

Alors il existe une unique solution $r \in [a, b[$ vérifiant $f(r) = 0$.

Pour tout $u_0 \in [a, b]$ vérifiant $f(u_0) > 0$ la suite $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, décroissante, et converge vers r .

De plus on peut majorer l'erreur par $0 \leq u_n - r \leq \frac{f(u_n)}{f'(a)}$.

Démonstration



Puisque $f(a) \leq 0 < f(b)$ il existe $r \in [a, b[$ vérifiant $f(r) = 0$. (TVI)

Nous avons $f'' \geq 0$ donc f' croît sur $[a, b]$.

Nous avons $f'(a) > 0$ donc $f' > 0$ sur $[a, b]$.

Puisque f est strictement croissante sur $[a, b]$,
la solution r vérifiant $f(r) = 0$ est unique

Nous avons $f(u_n) > 0$ si et seulement si $u_n \in]r, b]$. Puis on trouve

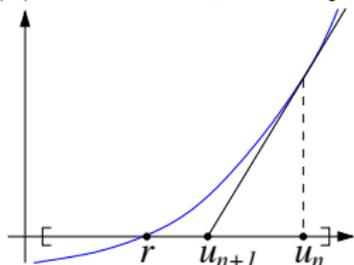
$$\begin{aligned} u_{n+1} - r &= u_n - r - \frac{f(u_n) - f(r)}{f'(u_n)} \\ &= u_n - r - \frac{f'(\xi)(u_n - r)}{f'(u_n)} = (u_n - r) \underbrace{\left(1 - \frac{f'(\xi)}{f'(u_n)}\right)}_{r \in]0, 1[}. \end{aligned}$$

On a $f(u_n) - f(r) = (u_n - r)f'(\theta)$ donc $u_n - r = \frac{f(u_n)}{f'(\theta)} \leq \frac{f(u_n)}{f'(a)}$. \square

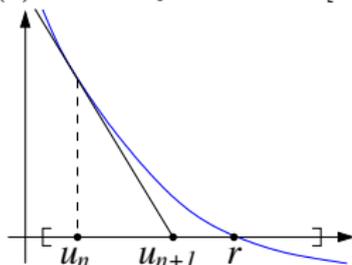
Fonctions convexes et convergence monotone (2/2)

Supposons $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$. Quatre cas typiques se présentent :

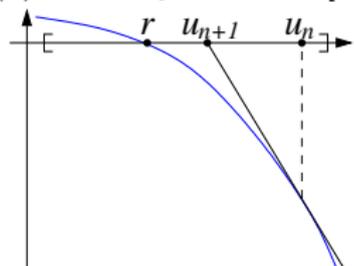
f croissante & convexe :
 $f'(a) > 0$, et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.



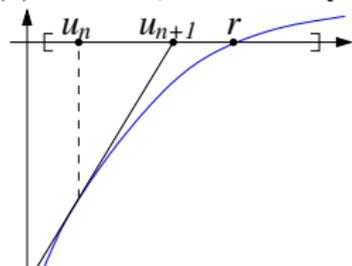
f décroissante & convexe :
 $f'(b) < 0$, et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.



f décroissante & concave :
 $f'(a) < 0$, et $f'' \leq 0$ sur $[a, b]$.



f croissante & concave :
 $f'(b) > 0$, et $f'' \leq 0$ sur $[a, b]$.



On choisit u_0 tel que $f(u_0) > 0$ (convexe) resp. $f(u_0) < 0$ (concave).

On a la majoration $|u_n - r| \leq \frac{|f(u_n)|}{\min |f'|}$ où $\min |f'| = |f'(a)|$ resp. $|f'(b)|$.

Bassin d'attraction dans le plan complexe

Si la méthode de Newton converge, elle converge finalement très vite. Mais la suite $\phi^n(u_0)$ ne converge pas pour toute valeur initiale u_0 !

- 1 Tout d'abord il faut assurer que la solution r visée soit une racine simple : $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$.
- 2 Ensuite il faut bien choisir une valeur initiale u_0 proche de r .

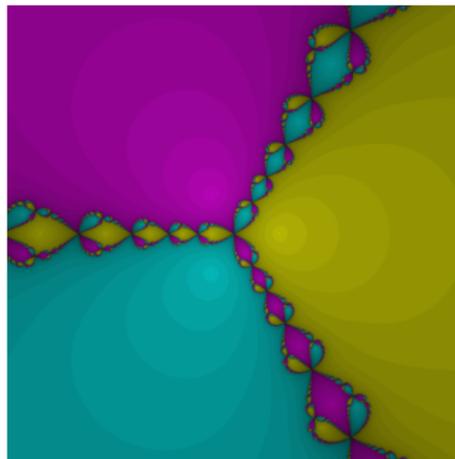
Question pratique : comment choisir u_0 pour assurer la convergence ?

Le **bassin d'attraction** d'une racine r est $A(r) := \{u_0 \mid \phi^n(u_0) \rightarrow r\}$.

Illustration.

La question de convergence de $\phi^n(u_0)$ donne lieu à de jolies images fractales !

Vous voyez ici les bassins d'attraction des trois racines complexes du polynôme $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = z^3 - 1$.



Une orbite attractive de période 2

Dans la méthode de Newton le choix du point initial est primordial.

Remarque

Même pour un polynôme on ne peut pas espérer la convergence pour « presque toute » valeur initiale.

Considérons $f(z) = z^3 - 2z + 2$. La méthode de Newton itère

$$\phi(z) = z - \frac{z^3 - 2z + 2}{3z^2 - 2} = \frac{2z^3 - 2}{3z^2 - 2}.$$

On constate que $\phi(0) = 1$ et $\phi(1) = 0$: c'est un cycle de longueur 2. Autrement dit, 0 et 1 sont des points fixes de $\phi \circ \phi$.

La dérivée de ϕ est $\phi'(z) = \frac{6z^4 - 12z^2 + 12z}{9z^4 - 12z^2 + 4}$.

On voit que $\phi'(0) = 0$, et par conséquent $(\phi \circ \phi)'(0) = 0$.

Ceci montre que le cycle $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$ est (super-)attractif : Tous les points dans un certain voisinage de $\{0, 1\}$ sont attirés vers ce cycle et ne convergeront donc pas vers une racine de f .

Bassin de super-attraction

Théorème (bassin de super-attraction)

Soit f une fonction de classe C^2 . Supposons que $f(r) = 0$ ainsi que $|f'| \geq m > 0$ et $|f''| \leq M$ sur $\bar{B}(r, \eta)$. On pose $\varepsilon := \min(\eta, \frac{m}{M}) > 0$.

Alors pour toute valeur initiale $u_0 \in \bar{B}(r, \varepsilon)$ la suite de Newton $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ converge vers r à une vitesse quadratique :

$$|u_n - r| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n - 1} \cdot |u_0 - r|.$$

Notation :

boule ouverte $B(a, \rho) := \{x \mid |x - a| < \rho\}$,

boule fermée $\bar{B}(a, \rho) := \{x \mid |x - a| \leq \rho\}$.

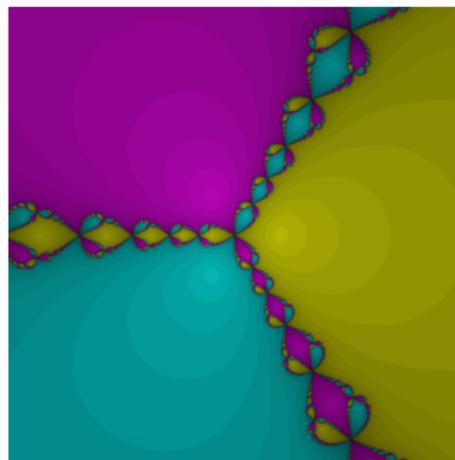
Dans \mathbb{R} on a bien sûr

$B(a, \rho) =]a - \rho, a + \rho[$ et

$\bar{B}(a, \rho) = [a - \rho, a + \rho]$.

Généralisation :

Le théorème et sa preuve se généralisent de \mathbb{R} à \mathbb{C} et à \mathbb{R}^n .



Démonstration du théorème

Par translation on peut supposer que $r = 0$. Nous avons

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = \frac{f'(u_n)u_n - f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Le développement de Taylor d'ordre 1 en u_n nous donne

$$0 = f(0) = f(u_n) + f'(u_n)(0 - u_n) + \frac{1}{2}f''(\xi_n)(0 - u_n)^2$$

pour un $\xi_n \in \langle 0, u_n \rangle$ convenable. De ces deux équations on déduit

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)u_n^2}{f'(u_n)}.$$

Avec $|f'| \geq m > 0$ et $|f''| \leq M$ ceci donne

$$|u_{n+1}| \leq \frac{M}{2m} |u_n|^2$$

ou encore $\frac{M}{2m} |u_{n+1}| \leq \left(\frac{M}{2m} |u_n|\right)^2$. Par récurrence on obtient

$$\frac{M}{2m} |u_n| \leq \left(\frac{M}{2m} |u_0|\right)^{2^n}.$$

Pour $|u_0| \leq \frac{m}{M}$ on a $\frac{M}{2m} |u_0| \leq \frac{1}{2}$, donc $|u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n - 1} |u_0|$. □

Exemple d'application

On reconsidère la fonction $f(x) = \arctan(x)$ et l'unique racine $r = 0$.
Appliquons le théorème au voisinage $\bar{B}(0, \eta)$ de rayon $\eta = 1$.

Étude de fonction...

On a $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ puis $f'''(x) = \frac{6x^2-2}{x^6+3x^4+3x^2+1}$.

Minoration de $|f'|$.

Sur $\bar{B}(0, 1)$ on a $\max f' = f'(0) = 1$ et $\min f' = f'(1) = \frac{1}{2}$.

Ainsi on obtient $|f'| \geq m := \frac{1}{2}$ sur $\bar{B}(0, 1)$.

Majoration de $|f''|$.

Sur \mathbb{R} on a $\max f'' = f''(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ et $\min f'' = f''(\frac{\sqrt{3}}{3})$.

Avec $f''(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}) = \mp 0.649\dots$ on conclut que $|f''| \leq M := 0.65$.

Conclusion.

On obtient $\varepsilon = \frac{m}{M} = 0.769\dots$. Le théorème garantit la convergence de la méthode de Newton pour toute valeur initiale $u_0 \in \bar{B}(0, \varepsilon)$.

Par exemple, pour $u_0 = 0.769$ on trouve $u_1 \approx -0.274$,
 $u_2 \approx 1.354 \cdot 10^{-2}$, $u_3 \approx -1.657 \cdot 10^{-6}$, $u_4 \approx 3.033 \cdot 10^{-18}$, etc.

Un critère local de convergence

Étant donné f et une valeur initiale u_0 , comment savoir si l'itération de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ convergera ?

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2 . On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta := |u_1 - u_0| = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

Supposons que f est définie sur $V := \bar{B}(u_0, 2\eta)$ et vérifie

$$\frac{|f''(x)|}{|f'(x)|} \leq \frac{1}{8\eta} \quad \text{pour tout } x \in V.$$

Alors $\phi|_V$ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$ et vérifie $\phi(V) \subset V$.

Par conséquent $f|_V$ admet une unique racine $r \in V$, $f(r) = 0$,

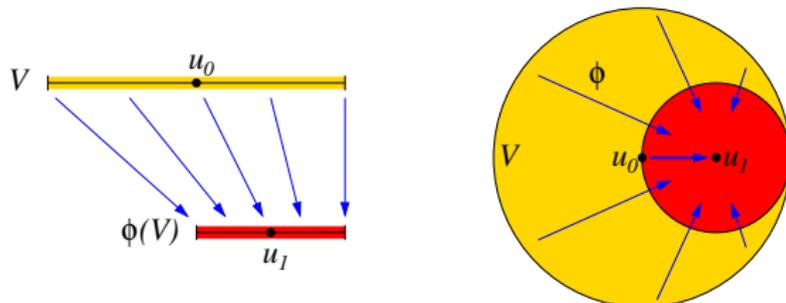
et la suite itérative $u_n = \phi^n(u_0)$ converge vers r .

- ◆ Finalement la vitesse de convergence sera quadratique.
- ◆ Le théorème et sa preuve se généralisent de \mathbb{R} à \mathbb{C} et à \mathbb{R}^n .

Démonstration du théorème (1/3)

Démonstration du théorème. Par hypothèse on a $|\phi(u_0) - u_0| = \eta$.
La première itération reste donc bien dans $V = \bar{B}(u_0, 2\eta)$.
Il faut encore contrôler les itérations suivantes !

L'idée est de montrer que $\phi|_V$ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$,
c'est-à-dire $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ pour tout $x, y \in V$.



Pour tout x avec $|x - u_0| \leq 2\eta$ on trouve $|\phi(x) - \phi(u_0)| \leq \eta$ puis

$$|\phi(x) - u_0| \leq |\phi(x) - \phi(u_0)| + |\phi(u_0) - u_0| \leq 2\eta.$$

Ainsi $\phi(V) \subset V$ et la suite $u_n = \phi^n(u_0)$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration du théorème (2/3)

Après translation on peut supposer que $u_0 = 0$, donc $V = \bar{B}(0, 2\eta)$.

Par hypothèse f' ne s'annule pas dans V , donc ϕ est définie sur V .

Pour montrer que $\phi|_V$ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$ on montrera que

$$\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \quad \text{vérifie} \quad |\phi'| \leq \frac{1}{2} \quad \text{sur } V.$$

Étudions le quotient $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ et sa dérivée $u'(x) = 1 - \frac{f''(x)}{f'(x)}u(x)$.

On a $|u(0)| = \eta$ ainsi que $|u'(x)| \leq 1 + M|u(x)|$ avec $M := \sup_V \frac{|f''|}{|f'|}$.

Comparaison. La fonction $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$v(t) = \left(\eta + \frac{1}{M}\right) \exp(Mt) - \frac{1}{M}$$

est croissante et vérifie $v(0) = \eta$ ainsi que $v'(t) = 1 + Mv(t)$.

Lemme (encore à montrer)

On a $|u(x)| \leq v(|x|)$ pour tout $x \in V$, donc $|u| \leq v(2\eta)$.

Pour $M \leq \frac{1}{8\eta}$ on calcule que $Mv(2\eta) = \frac{9}{8} \exp\left(\frac{1}{4}\right) - 1 = 0.4445 \cdots < \frac{1}{2}$.
Sur V on conclut ainsi que $|\phi'| \leq M|u| \leq \frac{1}{2}$, comme souhaité. \square

Démonstration du théorème (3/3)

Démonstration du lemme. On a $|u(0)| = \eta$ ainsi que $|u'(x)| \leq 1 + M|u(x)|$ pour tout $x \in V = \bar{B}(0, 2\eta)$.

Pour tout $\eta' > \eta$ la fonction auxiliaire $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$v(t) = \left(\eta' + \frac{1}{M}\right) \exp(Mt) - \frac{1}{M}$$

vérifie $v(0) > |u(0)|$ ainsi que $v'(t) = 1 + Mv(t)$ pour tout $t \in [0, 2\eta]$.

Montrons que $|u(x)| < v(|x|)$ pour tout $x \in V$. Sinon il existerait $x \in V$ tel que $|u(x)| = v(|x|)$. Pour $|x|$ minimal on arrive à une contradiction :

$$\begin{aligned} |u(x)| - |u(0)| &\leq |u(x) - u(0)| = \left| \int_0^x u'(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^x |u'(\xi)| d\xi \\ &\leq \int_0^x 1 + M|u(\xi)| d\xi \leq \int_0^{|x|} 1 + Mv(t) dt \\ &= \int_0^{|x|} v'(t) dt = v(|x|) - v(0) = |u(x)| - v(0) < |u(x)| - |u(0)|. \end{aligned}$$

On n'a besoin que de l'inégalité faible $|u(x)| \leq v(|x|)$ pour tout $x \in V$. Elle est vérifiée pour $\eta' > \eta$ et reste valable dans la limite $\eta' = \eta$. \square

Un critère localisé en un seul point

Le critère suivant se passe de l'étude de f dans un voisinage de u_0 : il repose uniquement sur les dérivées de f en u_0 .

Théorème (Smale, 1986)

Soit f une fonction analytique. On pose $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit u_0 une valeur initiale telle que $f(u_0) \neq 0$ et $f'(u_0) \neq 0$.

Soit $\eta = \frac{|f(u_0)|}{|f'(u_0)|}$ le pas initial dans l'itération de Newton.

On suppose que $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - u_0)^k$ pour tout $z \in B(u_0, 2\eta)$. Si

$$|a_k| \leq (8\eta)^{1-k} |a_1| \quad \text{pour tout } k \geq 2,$$

alors f admet une unique racine r dans la boule $B(u_0, 2\eta)$ et la suite de Newton $u_n = \phi^n(u_0)$ converge quadratiquement vers r :

$$|u_n - r| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n - 1} \cdot |u_0 - r|.$$



Ce théorème s'applique particulièrement bien aux polynômes.



Pour une preuve voir Blum & Cucker & Shub & Smale : *Complexity and Real Computation*, Springer, New York 1998, chap. 8.