# Mathématiques assistées par ordinateur

## Chapitre 2 : Notions d'analyse

Michael Eisermann

Mat249, DLST L2S4, Année 2008-2009
www-fourier.ujf-grenoble.fr/˜eiserm/cours # mao
Document mis à jour le 6 juillet 2009

INSTITUT FOURIER
UNIVERSITE JOSEPH FOURIER GRENOBLE 1 SCIENCES.TECHNOLOGIE.SANTÉ

# Objectifs de ce chapitre

Les connaissances, surtout en mathématiques, se construisent et se transmettent le plus efficacement par des étapes bien organisées, chaque étape faisant appel à des étapes précédentes, par nécessité logique ou bien dans l'objectif de tisser des liens profitables.

Ainsi ce cours se base sur les mathématiques que vous avez acquises, je l'espère, en début de licence : langage mathématique, calcul algébrique, et notamment des arguments d'analyse.

Ce chapitre rappelle/présente quelques notions de base qui sont indispensables pour l'analyse mathématique. L'objectif est de vous guider dans votre révision/approfondissement. Ceci vous donne un point de départ, puis devrait vous encourager à aller plus loin.

Comme outils indispensables pour l'analyse nous discutons ici la convergence des suites et des séries, puis les notions de continuité et de dérivabilité des fonctions. Les résultats fondamentaux sont ensuite appliqués pour étudier l'exemple phare $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, qui est sans doute la fonction la plus importante en mathématiques.

📖 Il existe de nombreux ouvrages d'analyse. En voici un que j'aime : Walter Rudin : *Principes d'analyse mathématique*, Dunod, Paris 2002.

# Sommaire

# Corps

Les nombres réels forment un ensemble $\mathbb{R}$ muni de deux opérations, l'addition $+\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et la multiplication $\cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Le triplet $(\mathbb{R},+,\cdot)$ est un ***corps***, c'est-à-dire qu'il jouit des propriétés suivantes :

| | |
|---|---|
| (A1 : associativité) | $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:\ (a+b)+c=a+(b+c)$ |
| (A2 : commutativité) | $\forall a,b\in\mathbb{R}:\ a+b=b+a$ |
| (A3 : élément neutre) | $\exists 0\in\mathbb{R}\ \forall a\in\mathbb{R}:\ 0+a=a$ |
| (A4 : élément opposé) | $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists b\in\mathbb{R}:\ a+b=0$ |
| (M1 : associativité) | $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ |
| (M2 : commutativité) | $\forall a,b\in\mathbb{R}:\ a\cdot b=b\cdot a$ |
| (M3 : élément neutre) | $\exists 1\in\mathbb{R}, 1\neq 0\ \forall a\in\mathbb{R}:\ 1\cdot a=a$ |
| (M4 : élément inverse) | $\forall a\in\mathbb{R}, a\neq 0\ \exists b\in\mathbb{R}:\ a\cdot b=1$ |
| (D : distributivité) | $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:\ a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ |

Remarque : Vous avez peut-être rencontré la notion de corps en algèbre linéaire. Elle regroupe beaucoup d'exemples, dont les nombres rationnels $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, réels $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ou complexes $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

# Corps ordonnés

Les nombres réels sont ordonnés : on distingue des éléments positifs, notés $x > 0$, de manière compatible avec les opérations du corps :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a soit $x > 0$ soit $x = 0$ soit $-x > 0$.
2. Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $x + y > 0$ ainsi que $xy > 0$.

On définit l'ordre strict $x > y$ par $x - y > 0$. L'ordre faible $x \geq y$ veut dire que $x > y$ ou $x = y$ ; elle est réflexive, transitive, antisymétrique. L'ordre inverse $x < y$ est défini par $y > x$, et $x \leq y$ veut dire que $y \geq x$.

Les intervalles dans $\mathbb{R}$ sont notés comme suit :

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \qquad ]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\},$$
$$]a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \qquad [a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit la valeur absolue par $|x| := x$ si $x \geq 0$ et par $|x| := -x$ si $x \leq 0$. On vérifie aisément les propriétés suivantes :

- $|x| \geq 0$, et $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

# Bornes supérieure et inférieure

Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est ***majorée*** par $m \in \mathbb{R}$ si $a \leq m$ pour tout $a \in A$. Dans ce cas on dit aussi que $m$ est un ***majorant*** de $A$.

On dit que $s \in \mathbb{R}$ est la ***borne supérieure*** de $A$ si $s$ est le plus petit majorant de $A$. Si elle existe, elle est unique et sera notée $s = \sup A$.

Si $A$ n'est pas majorée on pose $\sup A = +\infty$.
Pour l'ensemble vide on pose $\sup \emptyset = -\infty$.

De manière symétrique on définit ***minorant*** et ***borne inférieure***.
Une partie est ***bornée*** si elle est à la fois minorée et majorée.

Exemple : pour $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}$ on a $\sup A = 1$ et $\inf A = 0$.
Exemple : la partie $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \leq 2\}$ est majorée mais n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Dans $\mathbb{R}$ on a $\sup A = \sqrt{2}$.

## Théorème (caractérisation des nombres réels, admis)

*Les nombres réels forment un corps ordonné* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *tel que toute partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure dans* $\mathbb{R}$*.*
*Tout corps ayant cette propriété est canoniquement isomorphe à* $\mathbb{R}$*.*

# Les rationnels sont denses dans les réels

Comme tout corps ordonné, $\mathbb{R}$ contient les nombres naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, puis les nombres entiers $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$, et ainsi aussi les nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

## Théorème

*Le corps $\mathbb{R}$ jouit des propriétés (équivalentes) suivantes :*

1. *Pour tout $r > 0$ dans $\mathbb{R}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > r$.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ dans $\mathbb{R}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*
3. *L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Ceci veut dire que pour tout nombre réel $r \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre rationnel $q \in Q$ tel que $|q - r| < \varepsilon$.*

**Démonstration.** (1) Supposons par l'absurde que $n \leq r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La partie $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ serait bornée, il existerait donc une borne supérieure $s \in \mathbb{R}$. Comme $s - 1$ ne majore pas $\mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $s - 1 < n$. Ainsi $s < n + 1 \in \mathbb{N}$, donc $s$ non plus ne majore pas $\mathbb{N}$.

(2) découle de (1) car $\frac{1}{n} < \varepsilon$ équivaut à $\frac{1}{\varepsilon} < n$.

(3) Étant donné $r \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{b} < \varepsilon$, puis $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \leq br < a + 1$. Ainsi $\frac{a}{b} \leq r < \frac{a+1}{b}$ et $|\frac{a}{b} - r| < \frac{1}{b} < \varepsilon$. $\square$

# Existence des racines réelles

## Théorème (existence des racines réelles)

*Pour tout* $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *et* $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ *il existe un unique* $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *tel que* $x^n = y$*. Ceci permet de définir* $\sqrt[n]{y} := x$ *de sorte que* $(\sqrt[n]{y})^n = y$*.*

Nous allons reconsidérer ce résultat fondamental à plusieurs reprises et sous différents aspects. Il apparaît ici comme une première conséquence de la borne supérieure (voir la preuve ci-dessous). Plus tard il réapparaîtra comme corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Quant au calcul effectif, nous reprendrons ce problème comme une belle illustration de la méthode de Newton. Nous discuterons aussi sa généralisation aux racines complexes et plus généralement au théorème fondamental de l'algèbre.

**Démonstration.** L'unicité est claire : $0 \leq a < b$ implique $0 \leq a^n < b^n$.
Pour l'existence considérons l'ensemble $A = \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid t^n \leq y\}$.
La partie $A$ est non vide, car $0 \in A$. Elle est majorée par $y + 1$,
car $t \geq y + 1$ entraîne $t^n \geq (y+1)^n = y^n + \cdots + ny + 1 > y$.
Par conséquent $A$ admet une borne supérieure.
Nous allons montrer que $x := \sup A$ vérifie $x^n = y$.

# Racines réelles : démonstration

Supposons par l'absurde que $x^n < y$. Dans ce cas il existerait $a \in \,]0,1[$ vérifiant $a < \frac{y-x^n}{(1+x)^n-x}$, d'où

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= x^n + \tbinom{n}{1}x^{n-1}a + \tbinom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots + \tbinom{n}{n}a^n \\ &\le x^n + a\big[\tbinom{n}{1}x^{n-1} + \tbinom{n}{2}x^{n-2} + \cdots + \tbinom{n}{n}\big] \\ &= x^n + a[(1+x)^n - x^n] < y^n + (x - y^n) = x.\end{aligned}$$

Ainsi $x + a \in A$, ce qui contredit l'hypothèse que $x$ majore $A$.

Supposons par l'absurde que $x^n > y$. Dans ce cas il existerait $b \in \,]0,x[$ vérifiant $b < \frac{x^n-y}{(1+x)^n-x}$. Pour tout $t \ge x-b$ on aurait alors

$$\begin{aligned}t^n \ge (x-b)^n &= x^n - \tbinom{n}{1}x^{n-1}b + \tbinom{n}{2}x^{n-2}b^2 - \cdots + (-1)^n\tbinom{n}{n}b^n \\ &\ge x^n - b\big[\tbinom{n}{1}x^{n-1} + \tbinom{n}{2}x^{n-2} + \cdots + \tbinom{n}{n}\big] \\ &= x^n - b[(1+x)^n - x^n] > y^n - (y^n - x) = x.\end{aligned}$$

Ainsi $x - b$ majorerait $A$, ce qui contredit l'hypothèse que $x$ est le plus petit majorant de $A$. Nous concluons que $x^n = y$, comme énoncé. $\square$

# Puissances rationnelles et réelles

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ nous avons défini la puissance $x^n$ par la récurrence $x^0 := 1$ et $x^{n+1} := x^n \cdot x$. Établir les propriétés

(*) $\qquad x^{s+t} = x^s \cdot x^t, \qquad (x^s)^t = x^{st}, \qquad (x \cdot y)^s = x^s \cdot y^s.$

Pour $x \neq 0$ et $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, nous posons $x^a := \left(\frac{1}{x}\right)^{-a}$.
Établir les propriétés (*) pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$ et $s, t \in \mathbb{Z}$.

Pour $x > 0$ et $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ où $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \geq 1$ nous posons $x^{\frac{a}{b}} := \sqrt[b]{x^a}$.
Montrer que $\sqrt[b]{x^a} = \sqrt[b]{x}^a$ et établir (*) pour tout $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ et $r, s \in \mathbb{Q}$.

Pour $s \in \mathbb{Q}$ fixé ceci définit une fonction $f \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = x^s$.
Pour $s > 0$ elle est strictement croissante, pour $s < 0$ elle est strictement décroissante, et pour $s = 0$ elle est constante.

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé ceci définit une fonction $g \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{>0}$, $g(s) = x^s$.
Pour $x > 1$ elle est strictement croissante, pour $x < 1$ elle est strictement décroissante, et pour $x = 1$ elle est constante.

Essayons d'étendre notre construction de $x^s$ aux exposants réels.
Pour $x \geq 1$ et $r \in \mathbb{R}$ on pose $x^r := \sup\{x^s \mid s \in \mathbb{Q}, s \leq r\}$. Pour $x < 1$ on pose $x^r := \left(\frac{1}{x}\right)^{-r}$. Établir (*) pour tout $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ et $r, s \in \mathbb{R}$.

Une construction alternative sera de poser $x^s := e^{s \ln x}$ après avoir construit l'exponentielle $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ et son inverse $\ln \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

# Suites réelles et convergence

## Définition (suite convergente)

Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ notée $n \mapsto a_n$.

- La suite $(a_n)$ ***converge*** vers $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon$$

  Dans ce cas on écrit $a_n \to a$ ou aussi $\lim a_n = a$.
- Si $(a_n)$ ne converge pas on dit que la suite ***diverge***.
- La suite $(a_n)$ ***diverge vers*** $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad a_n \geq M$$

  Dans ce cas on écrit $a_n \to +\infty$ ou aussi $\lim a_n = +\infty$.
- La suite $(a_n)$ ***diverge vers*** $-\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad a_n \leq M$$

  Dans ce cas on écrit $a_n \to -\infty$ ou aussi $\lim a_n = -\infty$.

# Unicité de la limite

## Proposition

*Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathbb{R}$*. Si* $a_n \to a$ *et* $a_n \to b$ *alors* $a = b$*.*

Ceci justifie la notation $\lim a_n = a$ pour les suites convergentes.

**Démonstration.** Supposons par l'absurde que $a \neq b$.
Alors le nombre $\varepsilon := |a-b|/3$ est positif, c'est-à-dire que $\varepsilon > 0$.
Comme $a_n \to a$, il existe $N$ tel que $|a_n - a| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
Comme $a_n \to b$, il existe $M$ tel que $|a_n - b| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq M$.
Pour $n \geq \max\{N, M\}$ nous avons donc $|a_n - a| \leq \varepsilon$ et $|a_n - b| \leq \varepsilon$.

Nous obtenons ainsi que

$$3\varepsilon = |a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ceci entraîne que $\varepsilon \leq 0$, ce qui contredit $\varepsilon > 0$. $\square$

# Exemples de suites convergentes

## Théorème

1. *Soit* $|q| < 1$. *Alors* $q^n \to 0$ *pour* $n \to 0$.
2. *Soit* $a > 0$. *Alors* $\frac{1}{n^a} \to 0$ *pour* $n \to \infty$.
3. *Soit* $a > 0$. *Alors* $\sqrt[n]{a} \to 1$ *pour* $n \to \infty$.
4. *Nous avons* $\sqrt[n]{n} \to 1$ *pour* $n \to \infty$.
5. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Alors* $\frac{x^n}{n!} \to 0$ *pour* $n \to \infty$.
6. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $b > 1$. *Alors* $\frac{n^a}{b^n} \to 0$ *pour* $n \to \infty$.

**Démonstration.** Ce sont des exercices bénéfiques et non triviaux. Si vous restez bloqué, consultez votre livre préféré d'analyse. $\square$

# Critères de convergence

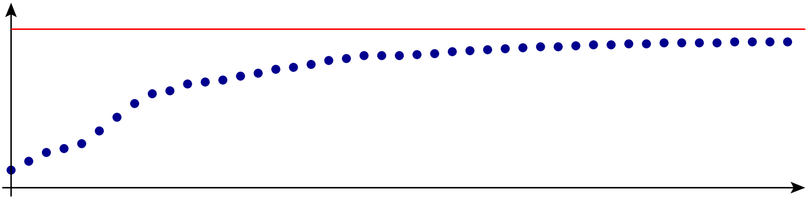
## Proposition

*Soient* $a_n \to a$ *et* $b_n \to b$ *deux suites convergentes.*
*Alors* $(a_n + b_n) \to a + b$ *et* $\lambda a_n \to \lambda a$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*
*Puis* $(a_n b_n) \to ab$ *ainsi que* $(a_n/b_n) \to a/b$ *si* $b \neq 0$*.*
*Si* $a_n \leq b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, alors* $a \leq b$*.* □

## Théorème

*Soit* $(a_n)$ *une suite réelle croissante, c'est-à-dire* $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$*.*

- *Si* $(a_n)$ *n'est pas majorée, alors* $a_n$ *diverge,* $a_n \to +\infty$*.*
- *Si* $(a_n)$ *est majorée, alors* $a_n$ *converge, et* $\lim a_n = \sup a_n$*.*



# Démonstration du théorème

**Démonstration.** Soit $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$ une suite croissante.

Supposons que $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas majoré :
pour tout réel $M \in \mathbb{R}$ il existe un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} \geq M$.
La croissance assure que $M \leq a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2} \leq \dots$,
donc $a_n \geq M$ pour tout $n \geq n_0$. On conclut que $a_n \to +\infty$.

Supposons que $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré. Par l'axiome de la borne supérieure il existe $a := \sup A$. On va montrer que $a_n \to a$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $a$ est le plus petit majorant de $A$, on sait que $a - \varepsilon$ ne majore pas $A$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} > a - \varepsilon$.
La croissance assure que $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2} \leq \dots \leq a$,
donc $|a_n - a| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. On conclut que $a_n \to a$. $\square$

# Séries numériques et convergence

À toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ on peut associer les ***sommes partielles*** $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, ce qui définit une nouvelle suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$.

## Définition

On dit que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est ***sommable*** si la suite $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ converge. Dans ce cas on appelle $s = \lim s_n$ la ***somme***, et on écrit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$.

## Exemple (la série géométrique)

La série $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ converge ssi $|q| < 1$, avec $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

**Démonstration.** Si $q = 1$, alors $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = n + 1 \to +\infty$.
Si $q \neq 1$, alors nous trouvons $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Pour $|q| < 1$ on voit que $s_n \to \frac{1}{1-q}$, donc $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.
Pour $|q| \geq 1$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ne converge pas. $\square$

⚠ Par abus de langage $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ dénote deux objets différents :

- La suite $(s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente ou non.
- La limite $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim \sum_{k=0}^{n} a_k$ en cas de convergence.

# Développement décimal et $B$-adique

Soit $B \in \mathbb{N}$, $B \geq 2$ ; pour le développement décimal on prend $B = 10$.

En base $B$ tout entier $a \in \{0, \dots, B^\ell - 1\}$ s'écrit comme

$$a_1 B^{\ell-1} + a_2 B^{\ell-2} + \cdots + a_{\ell-1} B + a_\ell \quad \text{où} \quad a_k \in \{0, \dots, B-1\}.$$

Ce développement s'étend aux nombres réels comme suit :

**Théorème**

*Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite arbitraire d'entiers dans $\{0, \dots, B-1\}$.*
*Alors la série $B^\ell \sum_{k=1}^\infty a_k B^{-k}$ converge vers un nombre $x \in [0, B^\ell]$.*
*Réciproquement, tout $x \in [0, B^\ell]$ s'écrit comme $x = B^\ell \sum_{k=1}^\infty a_k B^{-k}$.*

**Démonstration.** Les sommes partielles $s_n = \sum_{k=1}^n a_k B^{-k}$ forment une suite croissante car $a_k \geq 0$. Puisque $a_k \leq B - 1$ nous avons

$$s_n \leq \sum_{k=1}^n (B-1) B^{-k} \leq (B-1) B^{-1} \sum_{k=0}^\infty B^{-k} = (B-1) \frac{B^{-1}}{1 - B^{-1}} = 1.$$

Réciproquement, pour $r \in \mathbb{R}$ on définit $\lfloor r \rfloor := \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq r\}$.
Supposons que $x = B^\ell r_0$ où $r_0 \in [0, 1[$. (Le cas $r_0 = 1$ étant déjà fait.)
Étant donné $r_{n-1} \in [0, 1[$ on pose $a_n := \lfloor B r_{n-1} \rfloor$ et $r_n := B r_{n-1} - a_n$.
On obtient ainsi $x = B^\ell (\sum_{k=1}^n a_k B^{-k} + r_n B^{-n})$ où $r_n \in [0, 1[$.
Puisque $r_n B^{-n} \to 0$, on conclut que $B^\ell \sum_{k=1}^n a_k B^{-k} \to x$. □

# Limites supérieure et inférieure

Soit $(a_n)$ une suite dans $\mathbb{R}$, convergente ou non.
La suite $b_m = \sup_{n \geq m} a_n$ décroît, il existe donc $b := \lim b_m$.
La suite $c_m = \inf_{n \geq m} a_n$ croît, il existe donc $c := \lim c_m$.
Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $c_m \leq b_m$, donc $c \leq b$.

Exemple : $a_n = (-1)^n$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $b_m = +1$ et $c_m = -1$.

## Définition

À toute suite $(a_n)$ dans $\mathbb{R}$, convergente ou non, on peut associer

$$\limsup a_n := \lim_{m \to \infty} \Big( \sup_{n \geq m} a_n \Big) \quad \in \quad \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \qquad \text{et}$$

$$\liminf a_n := \lim_{m \to \infty} \Big( \inf_{n \geq m} a_n \Big) \quad \in \quad \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Exemple : Pour $a_n = (-1)^n$ on a $\limsup a_n = +1$ et $\liminf a_n = -1$.

## Proposition

*Une suite* $(a_n)$ *dans* $\mathbb{R}$ *converge ssi* $\limsup a_n = \liminf a_n$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

# Limites supérieure et inférieure

**Démonstration.** On continue à utiliser les notations $b_m = \sup_{n \geq m} a_n$ et $b = \lim b_m$ ainsi que $c_m = \inf_{n \geq m} a_n$ et $c = \lim c_m$.

« $\Rightarrow$ » Supposons que $a_n \to a$ :
pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m$ entraîne $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

Ceci implique que $b_m \leq a + \varepsilon$, donc $b \leq a + \varepsilon$.
De même on obtient $c_m \geq a - \varepsilon$, donc $c \geq a - \varepsilon$.
On en déduit que $|b - c| \leq 2\varepsilon$.
Puisque c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $b = c$.

« $\Leftarrow$ » La réciproque découle du lemme suivant $\square$

## Lemme (dit « lemme des gendarmes »)

*Supposons que* $c_n \leq a_n \leq b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
*Si* $c_n \to \ell$ *et* $b_n \to \ell$ *alors* $a_n \to \ell$.

**Démonstration.** Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|b_n - \ell| \leq \varepsilon$ et $|c_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi

$$\ell - \varepsilon \leq c_n \leq a_n \leq b_n \leq \ell + \varepsilon,$$

donc $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. On conclut que $a_n \to \ell$. $\square$

# Le critère de Cauchy

## Définition (suite de Cauchy)

Une suite $(a_n)$ est dite ***de Cauchy*** si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon$$

## Théorème

*Une suite dans $\mathbb{R}$ converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

## Remarque

La définition de convergence d'une suite $(a_n)$ nécessite une limite $a$ pour mesurer la distance $|a_n - a|$ qui doit vérifier $|a_n - a| \to 0$.

La définition d'une suite de Cauchy ne parle pas de limite, mais compare les termes $a_n$ entre eux, en mesurant $|a_n - a_m|$.

Il est parfois plus facile de prouver qu'une suite $(a_n)$ est de Cauchy, sans pour autant expliciter la limite, d'où l'intérêt du théorème.

# Démonstration du critère de Cauchy

**Démonstration.**
« $\Rightarrow$ » Supposons que $a_n$ converge et notons sa limite par $a := \lim a_n$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n$ entraîne $|a_n - a| \leq \varepsilon/2$. Pour $n, m \geq n_0$ on obtient ainsi

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Ceci veut dire que $(a_n)$ est une suite de Cauchy.

« $\Leftarrow$ » Pour la réciproque on suppose que $(a_n)$ est de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n, m \geq n_0$ entraîne $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$.

En particulier la suite $(a_n)$ est bornée : ceci est clair pour $(a_n)_{n \geq n_0}$ et reste vrai si l'on ajoute un nombre fini de termes $a_0, \dots, a_{n_0 - 1}$.

Notons $b = \limsup a_n$ et $c = \liminf a_n$. On a toujours l'inégalité $c \leq b$. Cauchy implique que $(\sup_{n \geq n_0} a_n) - (\inf_{m \geq n_0} a_m) \leq \varepsilon$, puis $b - c \leq \varepsilon$.

Puisque c'est vrai pour tout $\varepsilon \geq 0$ on conclut que $b \leq c$, donc $b = c$. Or, $\liminf a_n = \limsup a_n$ implique que $(a_n)$ converge. $\square$

# Séries convergentes et divergentes

## Corollaire (du critère de Cauchy)

*La série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\sum_{k=n}^{m} a_k| \leq \varepsilon$ pour tout $m \geq n \geq N$.*

*Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, alors nécessairement $a_k \to 0$.* $\square$

⚠ La réciproque est fausse, comme montre l'exemple suivant :

## Exemple (la série harmonique)

La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$ pour $n \to \infty$.

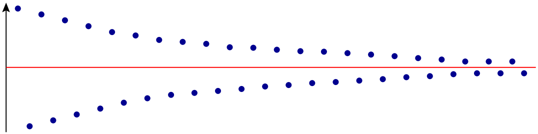
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^\ell} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{\ell-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^\ell}} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^\ell} + \cdots + \frac{1}{2^\ell}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{\ell}{2} \to +\infty\end{aligned}$$

# Séries alternées et le critère de Leibniz

## Théorème (critère de Leibniz)

*Soit* $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$ *une suite décroissante qui converge vers* $0$*, notée* $a_n \searrow 0$*. Alors la suite alternée* $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ *converge.*

*Pour approcher la limite* $s = \lim s_n$ *on a la majoration* $|s - s_n| \leq a_{n+1}$.



**Démonstration.**
La suite $(s_{2m})$ décroît, elle est minorée par $s_1$, donc elle converge.
La suite $(s_{2m+1})$ croît, elle est majorée par $s_0$, donc elle converge.
On trouve ainsi que $\limsup s_n = \lim s_{2m}$ et $\liminf s_n = \lim s_{2m+1}$, puis $\lim s_{2m} - \lim s_{2m+1} = \lim(s_{2m} - s_{2m+1}) = \lim a_{2m+1} = 0$. $\square$

## Exemple (la série de Leibniz)

La série alternée $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge (mais très lentement).

# Commentaires

## Remarque

La convergence $\frac{1}{k} \to 0$ est lente et peu efficace pour des calculs numériques. On verra des meilleurs méthodes plus loin.

## Remarque

Dans le critère de Leibniz la convergence $a_k \to 0$ ne suffit pas : l'hypothèse de la convergence monotone $a_k \searrow 0$ est essentielle. Considérons, par exemple, la suite définie par $a_k = (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$. Elle vérifie $a_k \to 0$, mais la série $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge !

## Remarque

Parfois $a_k$ décroît seulement à partir d'un certain rang $n_0$. Dans ce cas on peut toujours appliquer le théorème : la suite $s_n$ converge. Pour approcher la limite $s = \lim s_n$, par contre, on a la majoration $|s - s_n| \le a_{n+1}$ seulement pour $n \ge n_0$. C'est le cas pour la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ : les termes $x^{2k}/(2k)!$ décroissent dès que $2k \ge x$.

# Le corps des nombres complexes

Nous voulons construire le corps des nombres complexes

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{où} \quad i^2 = -1.$$

Pour ce faire on munit l'ensemble $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des deux opérations

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

On identifie tout $x \in \mathbb{R}$ avec $(x, 0) \in \mathbb{C}$, puis on définit $i := (0, 1)$. Ainsi on obtient $i^2 = -1$, comme souhaité. Dans cette notation, tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique comme $z = x + yi$ où $x, y \in \mathbb{R}$. Les opérations se réécrivent ainsi comme

$$(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$
$$(x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i.$$

On vérifie patiemment que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps. À chaque nombre complexe $z = x + yi$ on associe le nombre conjugué $\bar{z} = x - yi$. On voit que $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$, et $> 0$ si et seulement si $z \neq 0$, d'où

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2}i.$$

# Le corps des nombres complexes

Puisque tout élément $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique comme $z = x + yi$ où $x, y \in \mathbb{R}$, on peut définir $\mathrm{Re}(z) := x$ et $\mathrm{Im}(z) := y$. On remarque d'ailleurs que $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

Contrairement aux nombres réels, le corps des nombres complexes ne peut être ordonné. Effectivement, tout élément $x$ dans un corps ordonné vérifie $x^2 \geq 0$. Or, pour $i \in \mathbb{C}$ on trouve $i^2 = -1 < 0$.

Néanmoins, on peut définir une notion naturelle de distance sur $\mathbb{C}$ : pour tout $z \in \mathbb{C}$ on définit sa norme par $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$, ce qui étend la valeur absolue de $\mathbb{R}$. (Géométriquement $|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance euclidienne dans le plan $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.) Pour tout $u, v \in \mathbb{C}$ on a

0. $|\mathrm{Re}(u)| \leq |u|$ et $|\mathrm{Im}(u)| \leq |u|$.
1. $|u| \geq 0$, et $|u| = 0$ si et seulement si $u = 0$.
2. $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$ et $|\bar{u}| = |u|$.
3. $|u + v| \leq |u| + |v|$.

L'inégalité triangulaire (3) découle des propriétés précédentes comme suit : Si $u + v = 0$, alors (3) se déduit de (1). Si $u + v \neq 0$, alors par (2)

$$1 = \mathrm{Re}\left(\tfrac{u}{u+v}\right) + \mathrm{Re}\left(\tfrac{v}{u+v}\right) \leq \left|\tfrac{u}{u+v}\right| + \left|\tfrac{v}{u+v}\right| = \tfrac{|u|}{|u+v|} + \tfrac{|v|}{|u+v|}.$$

# Suites complexes et convergence

## Définition (suite convergente)

Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$ est une fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ notée $n \mapsto a_n$.

- La suite $(a_n)$ ***converge*** vers $a \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon$$

  Dans ce cas on écrit $a_n \to a$ ou aussi $\lim a_n = a$.
- Si $(a_n)$ ne converge pas on dit que la suite ***diverge***.
- La suite $(a_n)$ ***diverge vers*** $\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |a_n| \geq M$$

  Dans ce cas on écrit $a_n \to \infty$ ou aussi $\lim a_n = \infty$.

**Exemple.** Considérons un nombre $q \in \mathbb{C}$ et la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

- Pour $|q| < 1$ on a $q^n \to 0$.
- Pour $|q| > 1$ on a $q^n \to \infty$.
- Pour $q = 1$ on a $q^n \to 1$, c'est une suite constante.
- Pour $|q| = 1$, $q \neq 1$ la suite $q^n$ ne converge pas, elle diverge.

# Critères de convergence

## Proposition

*Soit* $(a_n)$ *une suite dans* $\mathbb{C}$ *et soit* $a \in \mathbb{C}$*. Nous avons* $a_n \to a$ *dans* $\mathbb{C}$ *si et seulement si* $\operatorname{Re}(a_n) \to \operatorname{Re}(a)$ *et* $\operatorname{Im}(a_n) \to \operatorname{Im}(a)$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

**Démonstration.** On a $a_n \to a$ si et seulement si $|a_n - a| \to 0$.
Dans ce cas $|\operatorname{Re}(a_n) - \operatorname{Re}(a)| = |\operatorname{Re}(a_n - a)| \leq |a_n - a|$ et $|\operatorname{Im}(a_n) - \operatorname{Im}(a)| = |\operatorname{Im}(a_n - a)| \leq |a_n - a|$ convergent vers $0$.

Réciproquement, si $\operatorname{Re}(a_n) \to \operatorname{Re}(a)$ et $\operatorname{Im}(a_n) \to \operatorname{Im}(a)$, alors $|a_n - a|^2 = |\operatorname{Re}(a_n) - \operatorname{Re}(a)|^2 + |\operatorname{Im}(a_n) - \operatorname{Im}(a)|^2 \to 0$. □

Les critères de convergence vus pour $\mathbb{R}$ restent valables pour $\mathbb{C}$ pourvu qu'ils n'utilisent que la distance $|\cdots|$ et pas l'ordre $\leq$.

## Proposition

*Soient* $a_n \to a$ *et* $b_n \to b$ *deux suites convergentes dans* $\mathbb{C}$*.*
*Alors* $(a_n + b_n) \to a + b$ *et* $\lambda a_n \to \lambda a$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$*.*
*On a aussi* $(a_n b_n) \to ab$ *ainsi que* $(a_n / b_n) \to a/b$ *si* $b \neq 0$*.* □

# Critères de convergence

Les notions $\liminf$ et $\limsup$ n'ont pas de sens pour les suites dans $\mathbb{C}$ car elles reposent sur l'ordre $\leq$ dans $\mathbb{R}$. Par contre on garde toujours :

## Définition (suite de Cauchy)

Une suite $(a_n)$ dans $\mathbb{C}$ est dite ***de Cauchy*** si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon$$

## Théorème

*Une suite $(a_n)$ dans $\mathbb{C}$ converge si et seulement elle est de Cauchy.*

**Démonstration.** Toute suite convergente est de Cauchy :
Si $a_n \to a$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - a| \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq N$. Par conséquent, pour tout $m, n \geq N$ on trouve

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| \leq \varepsilon.$$

Pour la réciproque, on applique le critère réel à $\mathrm{Re}(a_n)$ et $\mathrm{Im}(a_n)$ :
Si $(a_n)$ est de Cauchy, alors $\mathrm{Re}(a_n)$ et $\mathrm{Im}(a_n)$ sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
Il existe donc $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Re}(a_n) \to x$ et $\mathrm{Im}(a_n) \to y$.
Pour $a = x + yi$ on obtient ainsi la convergence $a_n \to a$. $\square$

# Séries numériques et convergence

À toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$ on peut associer les ***sommes partielles*** $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, ce qui définit une nouvelle suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$.

## Définition

On dit que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est ***sommable*** si la suite $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ converge. Dans ce cas on appelle $s = \lim s_n$ la ***somme***, et on écrit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$.

## Exemple (la série géométrique)

La série $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ converge ssi $|q| < 1$, avec $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

⚠ Par abus de langage $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ dénote deux objets différents :

- La suite $(s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente ou non.
- La limite $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim \sum_{k=0}^{n} a_k$ en cas de convergence.

## Corollaire (du critère de Cauchy)

*La série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\sum_{k=n}^{m} a_k| \le \varepsilon$ pour tout $m \ge n \ge N$.*
*Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, alors $a_k \to 0$. (La réciproque est fausse.)* $\square$

# Le critère de comparaison

## Proposition (séries à termes positifs ou nuls)

*Une série* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *à termes positifs ou nuls* $c_k \geq 0$ *converge ssi la suite des sommes partielles* $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *est bornée.* $\square$

## Théorème (critère de comparaison)

*Supposons que* $|a_k| \leq c_k$ *pour tout* $k \geq k_0$.
*Si* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *converge, alors* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge.*

**Démonstration.** La suite $\sum_{k=0}^{n} c_k$ converge, elle est donc de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq n \geq n_0$ entraîne

$$\left| \sum_{k=0}^{m} c_k - \sum_{k=0}^{n} c_k \right| = \sum_{k=n+1}^{m} c_k \leq \varepsilon.$$

Pour $m \geq n \geq \max\{n_0, k_0\}$ nous trouvons ainsi

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} c_k \leq \varepsilon.$$

La suite $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est donc de Cauchy, donc elle converge. $\square$

# Séries absolument convergentes

## Définition

Une série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est dite ***absolument convergente*** si la série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ des valeurs absolues converge.

## Corollaire (du critère de comparaison)

*Toute série absolument convergente est convergente.* $\square$

## Exemples

Pour tout $q \in \mathbb{C}$ vérifiant $|q| < 1$ la série géométrique $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ est convergente et absolument convergente car $\sum_{k=0}^{\infty} |q|^k$ converge.

La série de Leibniz $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente (série alternée) mais pas absolument convergente car $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

# Comparaison avec la série géométrique

## Corollaire

*Soit* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathbb{C}$ *telle que* $|a_k| \leq Mq^k$ *pour certaines constantes* $M > 0$ *et* $q < 1$ *et tout* $k$ *à partir d'un certain rang* $k_0$*.*
*Alors la série* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge (absolument).*

**Démonstration.** On peut supposer que $k_0 = 0$.
On compare $\sum |a_k|$ avec la série géométrique $\sum Mq^k$ :

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} Mq^k = M\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \leq M\frac{1}{1-q}.$$

La suite croissante $(\sum_{k=0}^{n} |a_k|)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, elle converge.
Ainsi la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument, donc elle converge. $\square$

# Les critères des quotients et des racines

## Corollaire (critère des quotients)

*S'il existe un indice* $k_0 \in \mathbb{N}$ *et une constante* $q < 1$ *tels que* $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$ *pour tout* $k \geq k_0$*, alors la série* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge (absolument).* $\square$

**Démonstration.** On a $|a_k| \leq \frac{|a_{k_0}|}{q^{k_0}} q^k$ pour tout $k \geq k_0$. $\square$

## Exemple

La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge : pour $k \geq 2x$ on a $\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} / \frac{x^k}{k!} = \frac{x}{k+1} \leq \frac{1}{2}$.

## Corollaire (critère des racines)

*Si* $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$*, alors la série* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge (absolument).*

**Démonstration.** Il existe $q$ tel que $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < q < 1$.
Ainsi $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ pour tout $k$ à partir d'un certain rang $k_0$.
Donc $|a_k| \leq q^k$ et la série $\sum a_k$ converge (absolument). $\square$

# Réarrangements de séries

## Définition

Un ***réarrangement*** d'une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ obtenue comme $b_\ell = a_{\tau(\ell)}$ par une bijection $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

## Théorème

*Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument, alors tout réarrangement $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$ converge vers la même limite, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$.*

**Démonstration.** Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m$ tel que $\sum_{k>m}|a_k| \leq \varepsilon$. Pour tout $n \geq m$ tel que $\{1, \dots, m\} \subset \tau(\{1, \dots, n\})$ on trouve

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\right| \leq \sum_{k>m} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $|\sum a_k - \sum b_\ell| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\sum a_k = \sum b_\ell$. $\square$

## Avertissement (théorème de Riemann)

Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge mais ne converge pas absolument, alors on peut réarranger les termes de sorte que la série $\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\tau(\ell)}$ converge vers n'importe quel nombre donné (y compris $\pm\infty$).

# Addition et multiplication de séries

## Théorème

*Soient* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ *et* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$ *deux séries convergentes.*
*Alors* $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = a + b$ *et* $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k = \lambda a$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*
*Pour le produit des deux séries on trouve ainsi*

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big) \cdot \Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} a_k b_\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_\ell.$$

*Si les deux séries convergentes absolument, alors on a même*

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big) \cdot \Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

**Démonstration.** On déduit $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = a + b$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k = \lambda a$ des règles analogues pour la suite des sommes partielles.
La première formule pour le produit en découle immédiatement.
La dernière formule se prouve comme les réarrangements.
(Les détails sont légèrement plus techniques.) $\square$

# La série exponentielle

### Théorème

*On peut définir* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *par la série absolument convergente*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

*Alors pour tout* $u, v \in \mathbb{C}$ *on a* $\exp(u+v) = \exp(u) \cdot \exp(v)$.

Au lieu de $\exp(z)$ on écrit aussi $e^z$ où $e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

**Démonstration.** Par multiplication des séries on obtient

$$\begin{aligned}\exp(u)\exp(v) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{v^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} \frac{u^k}{k!}\frac{v^\ell}{\ell!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+\ell=n} \frac{n!}{k!\ell!} u^k v^\ell = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (u+v)^n = \exp(u+v),\end{aligned}$$

par la formule binomiale $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$. □

# Sinus et cosinus

## Définition

On définit les deux fonctions $\sin, \cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k},$$

Ainsi on a $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. (Identité d'Euler)

## Proposition

*Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$ *nous avons* $\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ *et* $\sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$*.*
*Puisque* $|e^{i\theta}|^2 = 1$ *il en découle que* $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$*.*

**Démonstration.** Pour $\theta \in \mathbb{R}$ nous avons $\cos(\theta), \sin(\theta) \in \mathbb{R}$, donc $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ implique $\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$.
Ensuite $|e^{i\theta}|^2 = e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$ montre que $|e^{i\theta}| = 1$. $\square$

# Fonctions continues

## Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ est ***continue en*** $x \in I$ si pour toute suite $x_n \to x$ on a $f(x_n) \to f(x)$.
On dit que $f$ est ***continue*** (sur $I$) si elle est continue en tout $x \in I$.

## Exemples

Toute fonction constante est continue. L'identité est continue.
Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues, alors $f + g$ et $f \cdot g$ sont continues.
Ainsi toutes les fonctions polynomiales sont continues.

## Exemples

La fonction $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, +1\}$ n'est pas continue : pour $x_n = \frac{1}{n}$ on trouve $x_n \to 0$ mais $\operatorname{sign}(x_n) = 1$ ne converge pas vers $\operatorname{sign}(0) = 0$.
À noter que la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x| = x \cdot \operatorname{sign}(x)$ est continue.

## Proposition

*Si $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$ sont continues, alors $g \circ f$ est continue.* $\square$

# La fonction exponentielle est continue

## Théorème

*La fonction* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *définie par* $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *est continue.*

Ici nous étendons la notion de continuité aux fonctions complexes par la même condition que $f(z_n) \to f(z)$ pour tout $z_n \to z$.
Elle implique bien sûr la continuité de la restriction sur $\mathbb{R}$.

**Démonstration.** On a $\exp(z_n) - \exp(z) = \exp(z)[\exp(z_n - z) - 1]$.
Il suffit donc de montrer la continuité en $0$. Pour $|w| \leq \frac{1}{2}$ on trouve

$$|\exp(w) - 1| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{w^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |w|^k = \frac{|w|}{1-|w|} \leq 2|w|.$$

Ainsi $\exp(w) \to \exp(0) = 1$ pour tout $w \to 0$. □

## Corollaire

*Les fonctions* $\sin, \cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *données par*

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \textit{et} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

*sont également continues.* □

# Le théorème des valeurs intermédiaires

## Théorème (des valeurs intermédiaires, TVI)

*Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $y \in \mathbb{R}$ vérifie $f(a) \le y \le f(b)$, alors il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.*

**Démonstration.** (Construction par dichotomie)
On pose $a_0 := a$ et $b_0 := b$, ce qui assure $f(a_0) \le y \le f(b_0)$.
Supposons $a_n \le b_n$ construits tels que $f(a_n) \le y \le f(b_n)$.
Soit $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ le point au milieu.

- Si $f(c_n) \ge y$ on pose $a_{n+1} := a_n$ et $b_{n+1} := c_n$.
- Si $f(c_n) < y$ on pose $a_{n+1} := c_n$ et $b_{n+1} := b_n$.

Ceci assure à nouveau que $f(a_{n+1}) \le y \le f(b_{n+1})$.
On obtient deux suites $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots$ et $b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \dots$.
Ces suites sont monotones et bornées, donc convergentes.
On a $\lim a_n = \lim b_n$ car $|a_n - b_n| = 2^{-n}|a_0 - b_0| \to 0$.
Soit $x$ leur limite commune. Par construction nous avons

- $f(a_n) \le y$ pour tout $n$, donc $f(x) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n) \le y$.
- $f(b_n) \ge y$ pour tout $n$, donc $f(x) = f(\lim b_n) = \lim f(b_n) \ge y$.

Nous concluons que $f(x) = y$, comme souhaité. $\square$

Ceci permet d'approcher et d'encadrer un $x \in [a,b]$ vérifiant $f(x) = y$.

# Application aux polynômes réels

## Corollaire (les racines réelles revisitées)

*Pour tout* $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *et* $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ *il existe un unique* $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *tel que* $x^n = y$. *Ceci permet de définir* $\sqrt[n]{y} := x$ *de sorte que* $(\sqrt[n]{y})^n = y$.

**Démonstration.** La fonction $f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par $f(x) = x^n$ est strictement croissante et donc injective. Elle est continue et vérifie $f(0) = 0$ ainsi que $f(x) \to +\infty$ pour $x \to +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires elle est donc surjective. □

## Corollaire (du théorème des valeurs intermédiaires)

*Tout polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *de degré impair admet une racine dans* $\mathbb{R}$.

**Démonstration.** $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ vérifie $P(x) \to +\infty$ pour $x \to +\infty$ et $P(x) \to -\infty$ pour $x \to -\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$. □

⚠ Ceci n'est plus vrai pour tout polynôme de degré pair.
Par exemple $P(x) = x^2 + 1$ vérifie $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ceci a motivé l'extension au corps $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ où $i^2 = -1$.

# Caractérisation « $\varepsilon$ $\delta$ » des fonctions continues

## Proposition

*Une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est continue en $x \in I$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in I$ vérifiant $|t - x| \leq \delta$.*

**Démonstration.** « $\Leftarrow$ » Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe $\delta > 0$ tel que $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in I$ vérifiant $|t - x| \leq \delta$.
Si $x_n \to x$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x| \leq \delta$ pour tout $n \geq n_0$.
Ainsi $|f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, d'où $f(x_0) \to f(x)$.

« $\Rightarrow$ » Supposons que $x_n \to x$ entraîne toujours $f(x_n) \to f(x)$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ il existe $t \in I$ vérifiant $|t - x| \leq \delta$ mais $|f(t) - f(x)| > \varepsilon$.
Dans ce cas il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ un élément $x_n \in I$ vérifiant $|x_n - x| \leq \frac{1}{n}$ mais $|f(x_n) - f(x)| > \varepsilon$. Ceci définit une suite $x_n \to x$ telle que $x_n \not\to x$, contrairement à notre hypothèse. $\square$

# Le théorème du maximum

## Théorème (du maximum)

*Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors* $f$ *atteint la valeur* $\sup f := \sup\{f(t) \mid t \in [a,b]\}$ *: il existe* $x \in [a,b]$ *tel que* $f(x) = \sup f$*.*

**Démonstration.** (Construction par dichotomie)
On pose $a_0 := a$ et $b_0 := b$, ce qui assure $\sup f = \sup f|_{[a_0,b_0]}$.
Supposons $a_n \le b_n$ construits tels que $\sup f = \sup f|_{[a_n,b_n]}$.
Soit $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ le point au milieu.
Si $\sup f|_{[a_n,b_n]} = \sup f|_{[a_n,c_n]}$, alors on pose $a_{n+1} := a_n$ et $b_{n+1} := c_n$.
Sinon $\sup f|_{[a_n,b_n]} = \sup f|_{[c_n,b_n]}$ et on pose $a_{n+1} := c_n$ et $b_{n+1} := b_n$.
Ceci assure que l'on a à nouveau $\sup f = \sup f|_{[a_{n+1},b_{n+1}]}$.
On obtient deux suites $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots$ et $b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \dots$.
Ces suites sont monotones et bornées, donc convergentes.
On a $\lim a_n = \lim b_n$ car $|a_n - b_n| = 2^{-n}|a_0 - b_0| \to 0$.
Soit $x$ leur limite commune. Si l'on avait $f(x) < \sup f$, alors il existerait $y$ tel que $f(x) < y < \sup f$ et un voisinage $V$ de $x$ tel que $f(t) \le y$ pour tout $t \in V$. Pour $n$ assez grand on aurait $[a_n,b_n] \subset V$ et ainsi $\sup f|_{[a_n,b_n]} \le y < \sup f$, contrairement à notre construction.
Nous concluons que $f(x) = \sup f$, comme énoncé. $\square$

# Le théorème du maximum en $\mathbb{R}^d$

## Définition

Une partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est ***bornée*** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \leq m$ pour tout $a \in A$. Elle est ***fermée*** si toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $A$ qui converge vers $x$ dans $\mathbb{R}^d$ vérifie $x \in A$.

## Théorème (du maximum)

*Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ une partie bornée fermée. Alors toute fonction continue $f \colon A \to \mathbb{R}$ atteint la valeur $\sup f := \sup\{f(a) \mid a \in A\}$.*

**Démonstration.** Comme $A$ est bornée par hypothèse,
il existe $M > 0$ tel que $A_0 := A$ soit contenu dans $C_0 = [-M, +M]^d$.
Supposons $A_n = A \cap C_n$ construit tel que $\sup f = \sup f|_{A_n}$.
On subdivise le cube $C_n$ en $2^d$ sous-cubes parmi lesquels on choisit $C_{n+1}$ tel que $A_{n+1} := A \cap C_{n+1}$ vérifie $\sup f = \sup f|_{A_{n+1}}$.
Comme en dimension $d = 1$ on obtient $2^d$ suites de sommets des cubes $C_n$, qui convergent vers une limite commune $x \in \mathbb{R}^n$.
Par le lemme des gendarmes (en chaque projection) on voit que toute suite $a_n \in A_n$ vérifie $a_n \to x$. L'hypothèse que $A$ est fermée assure que $x \in A$. On conclut que $f(x) = \sup f$ comme avant. $\square$

# Fonctions dérivables : définition

## Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que $f$ est ***dérivable en*** $x \in I$ si le quotient

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

admet une limite $\ell$ pour toute suite $x_n \to x$, $x_n \neq x$.
Dans ce cas on définit la ***dérivée*** de $f$ en $x$ par

$$f'(x) := \lim_{x_n \to x, x_n \neq x} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}.$$

On dit que $f$ est ***dérivable*** (sur $I$) si elle est dérivable en tout $x \in I$.
Dans ce cas on définit la ***fonction dérivée*** $f'\colon I \to \mathbb{R}$ par $x \mapsto f'(x)$.

## Remarque

Si $f$ est dérivable en $x$ alors elle est continue en $x$, car
$|f(x_n) - f(x)| = |\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}| \cdot |x_n - x| \to f'(x) \cdot 0 = 0$.

⚠ La fonction $x \mapsto |x|$ est continue mais pas dérivable en $0$.

# Fonctions dérivables : interprétation géométrique

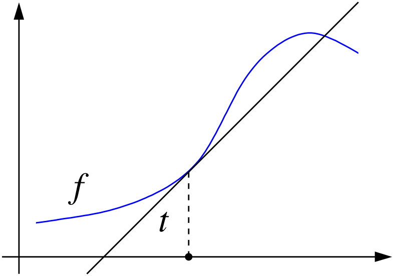
Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$ avec dérivée $f'(x_0)$ si et seulement si $f$ s'écrit pour tout $x \in I$ comme

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)g(x)$$

où $g\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $x_0$ vérifiant $g(x_0) = 0$.

Ainsi la fonction affine $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approche $f(x)$ de sorte que la différence $f(x) - t(x)$ soit négligeable devant $x - x_0$.

Dans cette situation on appelle $t$ la tangente à $f$ en $x_0$ :



# Fonctions dérivables : exemples

## Exemples

Toute fonction constante $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et $f' = 0$.
La fonction identité $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ est dérivable et $f' = 1$.

## Théorème

*Si $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $x \in I$, alors $f + g$, $fg$, et $f/g$ sont dérivables en $x$ (pour $f/g$ nous supposons $g(x) \neq 0$ bien sûr) et on a*

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\
(fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
(f/g)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

*Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable en $x$ et soit $g\colon J \to \mathbb{R}$ dérivable en $f(x) \in J$. Alors $g \circ f$ est dérivable en $x$ et $(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)$.*

Ceci permet, par exemple, de dériver toute fonction rationnelle.
Pour de plus amples exemples consultez votre livre préféré d'analyse.

# La fonction exponentielle est dérivable

## Théorème

*La fonction* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *définie par* $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *est dérivable, et sa dérivée vérifie* $\exp'(z) = \exp(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$*.*

Ici nous étendons la notion de dérivabilité aux fonctions complexes par la même condition que $\lim \frac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z}$ existe pour tout $z_n \to z$. Elle implique bien sûr la dérivabilité de la restriction sur $\mathbb{R}$.

**Démonstration.** Nous avons $\frac{\exp(z_n)-\exp(z)}{z_n-z} = \exp(z)\frac{\exp(z_n-z)-1}{z_n-z}$. Il suffit donc de montrer la dérivabilité en $0$. Pour $|w| \le \frac{1}{2}$ on trouve

$$\left|\frac{\exp(w)-\exp(0)}{w-0} - 1\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{(k+1)!} - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{(k+1)!}\right|$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{w^k}{(k+1)!}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |w|^k = \frac{|w|}{1-|w|} \le 2|w|.$$

Ainsi $\frac{\exp(w)-\exp(0)}{w-0} \to 1$ pour tout $w \to 0$, donc $\exp'(0) = \exp(0) = 1$. On conclut que $\frac{\exp(z_n)-\exp(z)}{z_n-z} = \exp(z)\frac{\exp(z_n-z)-1}{z_n-z} \to \exp(z)$ pour tout $z_n \to z$, donc $\exp'(z) = \exp(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. $\square$

# Extrema locaux

## Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que $x \in I$ est un ***maximum local*** de $f$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geq f(t)$ pour tout $t \in I$ vérifiant $|t - x| \leq \delta$.

On définit ***minimum local*** de la même manière.

Un ***extremum local*** est un minimum ou maximum local.

## Théorème

*Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et soit $x \in \,]a,b[$ un extremum local. Si $f$ est dérivable en $x$, alors $f'(x) = 0$.*

**Démonstration.** Supposons que $x$ est un maximum local de $f$.

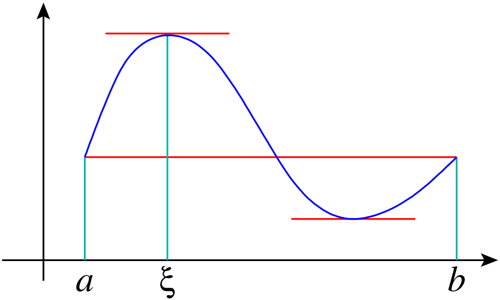
1. Si $x_n > x$ pour tout $n$, alors $\frac{f(x_n)-x}{x_n-x} \leq 0$, d'où $f'(x) \leq 0$.
2. Si $x_n < x$ pour tout $n$, alors $\frac{f(x_n)-x}{x_n-x} \geq 0$, d'où $f'(x) \geq 0$.

Puisque $x$ est à l'intérieur de l'intervalle, les deux cas ci-dessus sont réalisables. Ceci force la dérivée en $x$ d'être $f'(x) = 0$. □

# Le théorème de Rolle

## Théorème (de Rolle)

*Soit* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue qui soit dérivable sur* $]a,b[$*.*
*Si* $g(a) = g(b)$ *alors il existe* $\xi \in \,]a,b[$ *tel que* $f'(\xi) = 0$*.*

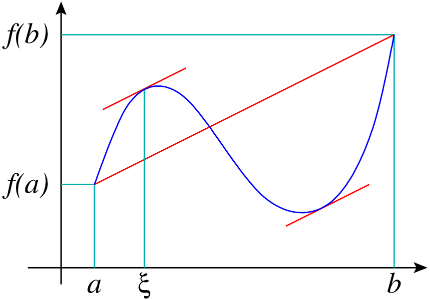



**Démonstration.** Par le théorème du maximum
il existe $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$ tel que $g(\xi_1) = \inf g$ et $g(\xi_2) = \sup g$.
Par définition nous avons $g(\xi_1) \le g(a) = g(b) \le g(\xi_2)$.
Si $g(\xi_1) < g(a)$ alors $\xi_1 \in \,]a,b[$ et donc $g'(\xi_1) = 0$.
Si $g(\xi_2) > g(a)$ alors $\xi_2 \in \,]a,b[$ et donc $g'(\xi_2) = 0$.
Si $\inf g = \sup g = g(a)$ alors $g$ est constant et $g' = 0$. $\square$

# Le théorème des accroissements finis

## Théorème (des accroissements finis, TAF)

*Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue qui soit dérivable sur* $]a,b[$*.*
*Alors il existe* $\xi \in \,]a,b[$ *tel que* $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$*.*




**Démonstration.** On définit $g(t) := [f(b) - f(a)]t - (b-a)f(t)$.
Alors $g$ est continue sur $[a,b]$ et vérifie $g(a) = g(b) = af(b) - bf(a)$.
De plus $g$ est dérivable sur $]a,b[$ avec pour dérivée

$$g'(t) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(t).$$

D'après le théorème de Rolle on a $g'(\xi) = 0$ pour un $\xi \in \,]a,b[$. $\square$

# Fonction dérivée et critère de monotonie

## Corollaire

*Soit $f\colon ]a,b[ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

- *Si $f' > 0$ sur $]a,b[$, alors $f$ est strictement croissante.*
- *Si $f' < 0$ sur $]a,b[$, alors $f$ est strictement décroissante.*
- *Si $f' \geq 0$ sur $]a,b[$, alors $f$ est croissante.*
- *Si $f' \leq 0$ sur $]a,b[$, alors $f$ est décroissante.*
- *Si $f' = 0$ sur $]a,b[$, alors $f$ est constante.*

**Démonstration.** Toutes les conclusions se déduisent de

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1)$$

qui tient pour toute paire $x_1 < x_2$ dans l'intervalle $]a,b[$
et pour un $x \in ]x_1, x_2[$ dépendant de $x_1, x_2$. $\square$

⚠ Il est essentiel que $f$ soit définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
Considérons la fonction $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{sign}(x)$.
Elle est continue et dérivable en tout point de son domaine de définition, avec pour dérivée $f' = 0$. Pourtant $f$ n'est pas constante !

# Propriétés de la fonction exponentielle $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Comme déjà remarqué dans l'introduction, l'exponentielle est sans doute la fonction la plus importante en mathématiques.

Afin de couronner notre bref développement d'analyse, nous pouvons maintenant établir en toute rigueur le beau théorème suivant :

## Théorème

*La fonction* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *définie par* $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *est infiniment dérivable, vérifiant* $\exp' = \exp$. *Elle jouit des propriétés suivantes :*

1. *Pour tout* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *nous avons* $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$. *En particulier* $\exp(z) \neq 0$ *et* $\exp(-z) = 1/\exp(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.
2. *La restriction* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ *est strictement croissante, vérifiant* $\exp(x) \to +\infty$ *pour* $x \to +\infty$, *et* $\exp(x) \to 0$ *pour* $x \to -\infty$.
3. *Il existe* $\pi \in \mathbb{R}_{>0}$ *tel que* $e^z = 1$ *si et seulement si* $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$. *Cette condition caractérise le nombre* $\pi$ *de manière unique.*
4. *L'application* $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *définie par* $\phi(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ *vérifie* $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{S}$ *où* $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ *est le cercle unité.*
5. *Pour tout* $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, *il existe* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $\exp(z) = w$. *On a* $\exp(z_1) = \exp(z_2)$ *si et seulement si* $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

# Propriétés de $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ : démonstration (1/4)

Nous avons déjà montré que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. Elle définit donc une fonction $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Nous avons vérifié que $\exp$ est continue puis dérivable en tout point $z \in \mathbb{C}$, et que la dérivée vérifie $\exp' = \exp$.

(1) Nous avons déduit $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ par la formule de multiplication des séries absolument convergentes. Ainsi nous trouvons que $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1$, ce qui prouve que $\exp(z) \neq 0$ ainsi que $\exp(-z) = 1/\exp(z)$.

(2) Pour $x \geq 0$ on a évidemment $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + \cdots \geq 1$. Pour $x \leq 0$ on applique $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$. Ainsi $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{>0}$. La fonction $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ est strictement croissante, car $\exp' = \exp$. Pour $x \geq 0$ la série montre que $\exp(x) \geq x$, donc $\exp(x) \to +\infty$ pour $x \to +\infty$. Pour $x \to -\infty$ nous trouvons $\exp(x) = 1/\exp(-x) \to 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires implique que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$ : pour tout $y \in \mathbb{R}_{>0}$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) = y$.

# Propriétés de $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ : démonstration (2/4)

(3) La série $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ montre que $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$.
Ainsi $|e^{it}|^2 = e^{it}\overline{e^{it}} = e^{it}e^{-it} = e^{it-it} = e^0 = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Autrement dit $e^{it}$ est dans le cercle unité $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

Rappelons notre définition de $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} \quad \text{et}$$

$$\cos(t) = \mathrm{Re}(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Dérivant l'identité d'Euler $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ nous trouvons $ie^{it} = \cos'(t) + i\sin'(t)$. En comparant avec $ie^{it} = -\sin(t) + i\cos(t)$ nous voyons que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

La série $\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$ montre que $\sin(0) = 0$ ainsi que $\sin(t) \geq t - \frac{t^3}{3!} > 0$ pour tout $t \in \,]0, 2]$ par le critère de Leibniz.

Ainsi $\cos$ est décroît strictement sur $[0, 2]$, car $\cos' = -\sin$.

La série $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$ montre que $\cos(0) = 1$ ainsi que $\cos(2) < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3}$ par le critère de Leibniz.

# Propriétés de $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ : démonstration (3/4)

Puisque $\cos(t)$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'un (unique) $t_0 \in [0, 2]$ tel que $\cos(t_0) = 0$. Comme $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\sin(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 2]$, nous avons donc $\cos(t_0) = 0$ et $\sin(t_0) = 1$, d'où $e^{it_0} = i$. Posons $\pi := 2t_0$. Ainsi $e^{i\pi/2} = i$ et $e^{i\pi} = i^2 = -1$ puis $e^{2i\pi} = i^4 = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on trouve $e^{2\pi in} = (e^{2\pi i})^n = 1^n = 1$. Réciproquement, considérons $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = 1$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. Alors $1 = |e^z| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x$, d'où $x = 0$. Pour montrer que $y \in 2\pi\mathbb{Z}$ il suffit de montrer que $e^{iy} \neq 0$ pour tout $y \in \,]0, 2\pi[$.

Soit $y \in \,]0, 2\pi[$, et donc $0 < y/4 < \pi/2$. Nous avons $e^{iy/4} = u + iv$ où $u = \cos(y/4) > 0$ et $v = \sin(y/4) > 0$. Ainsi la valeur

$$e^{iy} = (u + iv)^4 = u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + 4iuv(u^2 - v^2)$$

n'est réel que si $u^2 = v^2$. Comme en plus $u^2 + v^2 = 1$, ceci n'arrive que pour $u^2 = v^2 = \frac{1}{2}$, et dans ce cas on a $e^{iy} = -1 \neq 1$. Ceci prouve que $e^z = 1$ si et seulement si $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

# Propriétés de $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ : démonstration (4/4)

(4) Nous savons déjà que $|e^{it}| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc $\exp(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}$. Montrons l'inclusion réciproque $\exp(i\mathbb{R}) \supset \mathbb{S}$ : pour tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| = 1$ nous devons donc montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $e^{it} = w$.

- Supposons d'abord que $w = u + iv$ où $u \geq 0$ et $v \geq 0$. Puisque $u \in [0, 1]$ et la fonction $\cos$ est continue vérifiant $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi/2) = 0$, il existe un (unique) $t \in [0, \pi/2]$ tel que $\cos(t) = u$. Ainsi $\sin(t)^2 = 1 - u^2 = v^2$, d'où $\sin(t) = v$ car $\sin(t) \geq 0$ pour tout $[0, \pi/2]$. Nous avons donc $w = \cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$.
- Si $w = u + iv$ où $u < 0$ et $v \geq 0$, alors on applique l'argument précédent à $-iw$. Ainsi $-iw = e^{it}$, d'où $w = ie^{it} = e^{i(t+\pi/2)}$.
- Finalement, si $w = u + iv$ où $v < 0$, alors on applique l'argument précédent à $-w$. Ainsi $-w = e^{it}$, d'où $w = -e^{it} = e^{i(t+\pi)}$.

(5) Pour tout $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, nous avons $|w| > 0$, donc $|w| = e^x$ pour un (unique) $x \in \mathbb{R}$. Comme $w/|w| \in \mathbb{S}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $e^{iy} = w/|w|$. Nous concluons que $z = x + iy$ vérifie $e^z = w$.

L'équation $e^{z_1} = e^{z_2}$ équivaut à l'équation $e^{z_1 - z_2} = 1$,
et celle-ci équivaut à la condition $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$ d'après (3).

# Le logarithme $\ln\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

## Corollaire

*La fonction* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ *admet une unique inverse* $\ln\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ *telle que* $\ln(\exp(x)) = x$ *et* $\exp(\ln(y)) = y$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}_{>0}$*.*
*Elle jouit des propriétés suivantes :*

1. *On a* $\ln(e) = 1$ *et* $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$*.*
2. $\ln$ *est continue et strictement croissante, et nous avons* $\ln(x) \to +\infty$ *pour* $x \to +\infty$ *ainsi que* $\ln(x) \to -\infty$ *pour* $x \to 0$ *.*
3. $\ln$ *est dérivable avec pour dérivée* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$*.*

**Démonstration.** (1) $\exp(1) = e$ entraîne $\ln(e) = 1$.
Pour $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ posons $u := \ln(x)$ et $v := \ln(y)$. Ainsi nous trouvons

$$\ln(x \cdot y) = \ln(\exp(u) \cdot \exp(v)) = \ln(\exp(u + v)) = u + v = \ln(x) + \ln(y).$$

(2) découle des propriétés correspondantes de la fonction $\exp$.

(3) Dériver $\ln(\exp(x)) = x$ donne $\ln'(\exp(x)) \cdot \exp(x) = 1$.
Réécrivant cette égalité par $y = \exp(x)$ on obtient $\ln'(y) = \frac{1}{y}$. $\square$

# Puissances réelles

## Corollaire

*Soit $x \in \mathbb{R}_{>0}$. La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(s) := \exp(s \ln x)$ est continue et vérifie $f(s) = x^s$ pour tout $s \in \mathbb{Q}$. C'est l'unique extension continue des puissances rationnelles aux puissances réelles.*

Ceci justifie de poser $x^s := e^{s \ln x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$ et tout $s \in \mathbb{R}$.
On obtient $x^{s+t} = x^s \cdot x^t$ et $\bigl(x^s\bigr)^t = x^{st}$ ainsi que $(x \cdot y)^s = x^s \cdot y^s$.
Pour $x > 1$ la fonction $s \mapsto x^s$ est strictement croissante, pour $x < 1$ elle est strictement décroissante, et pour $x = 1$ elle est constante.
Pour $s > 0$ la fonction $x \mapsto x^s$ est strictement croissante, pour $s < 0$ elle est strictement décroissante, et pour $s = 0$ elle est constante.

**Démonstration.** On a $f(0) = 1$ et $f(1) = x$ puis $f(a+1) = x^a \cdot x$.
Par récurrence ceci montre que $f(a) = x^a$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.
Puisque $f(-a) = 1/f(a)$ on voit que $f(a) = x^a$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.
Comme $f(a) = f(a/b \cdot b) = f(a/b)^b$ pour tout $b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,
on obtient que $f(a/b) = \sqrt[b]{f(a)} = \sqrt[b]{x^a} = x^{a/b}$.
La continuité de $f$ est claire. Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ une autre fonction continue vérifiant $g(s) = x^s$ pour tout $s \in \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, tout nombre réel $a \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Q}$.
Ainsi $f(a) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n) = \lim g(a_n) = g(\lim a_n) = g(a)$. $\square$

# Fonctions trigonométriques

## Corollaire

*Les deux fonctions* $\sin, \cos \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définies par*

$$\sin(t) := \tfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \qquad \textit{et} \qquad \cos(t) := \tfrac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$$

*jouissent des propriétés suivantes :*

1. *On a* $\sin, \cos \in C^\infty$ *avec* $\sin' = \cos$ *et* $\cos' = -\sin$*.*
2. *Les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$ *sont périodiques de période* $2\pi$*.*
3. *On a* $\sin^2 + \cos^2 = 1$*. Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *vérifiant* $x^2 + y^2 = 1$ *il existe un unique* $t \in [0, 2\pi[$ *tel que* $\cos(t) = x$ *et* $\sin(t) = y$*.*
4. *On a* $\cos(s + t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)$ *et* $\sin(s + t) = \cos(s)\sin(t) + \sin(s)\cos(t)$ *pour tout* $s, t \in \mathbb{R}$*.*

**Démonstration.** Tout découle des propriétés de $\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ démontrées plus haut. Par exemple, on prouve (4) par

$$\begin{aligned}
&\cos(s + t) + i\sin(s + t) \\
&\qquad = e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it} = \big[\cos(s) + i\sin(s)\big]\big[\cos(t) + i\sin(t)\big] \\
&\quad = \big[\cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)\big] + i\big[\cos(s)\sin(t) + \sin(s)\cos(t)\big].
\end{aligned}$$

# Racines $n$-ièmes de l'unité

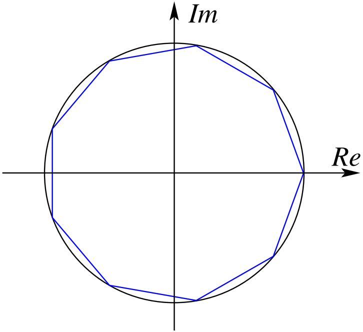
## Corollaire

*Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$. Pour $k = 0, \ldots, n-1$ les nombres*

$$\zeta_n^k = e^{2\pi ik/n} = \cos\left(\tfrac{k}{n}2\pi i\right) + i\sin\left(\tfrac{k}{n}2\pi i\right)$$

*sont deux-à-deux distinctes et vérifient $(\zeta_n^k)^n = \exp(2\pi ik) = 1$,*
*Ce sont donc les **racines $n$-ièmes de l'unité** et on trouve*

$$X^n - 1 = (X-1)(X-\zeta_n)\cdots(X-\zeta_n^{n-1}).$$



# Racines $n$-ièmes d'un nombre complexe

Après le polynôme $X^n - 1$ regardons $X^n - w$ où $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

## Corollaire (racines complexes)

*Pour tout $w \in \mathbb{C}$ il existe $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\xi^n = w$. Le polynôme $X^n - w$ admet donc $n$ racines dans $\mathbb{C}$, à savoir $\xi\zeta_n^k$ où $k = 0, \dots, n-1$ :*

$$X^n - w = (X - \xi)(X - \xi\zeta_n) \cdots (X - \xi\zeta_n^{n-1}).$$

**Démonstration.** Tout est clair pour $w = 0$. Supposons donc $w \neq 0$. Pour tout $w \in \mathbb{C}^\times$ il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = w$. Ainsi $\xi := e^{z/n}$ vérifie $\xi^n = (e^{z/n})^n = e^z = w$. Les racines de $X^n - w$ sont $\xi\zeta_n^k$ où $k = 0, \dots, n-1$ : elles vérifient $(\xi\zeta_n^k)^n = \xi^n = w$, elles sont deux-à-deux distinctes, et la liste est exhaustive car le polynôme $X^n - w$ de degré $n$ admet au plus $n$ racines dans le corps $\mathbb{C}$. $\square$

# Le théorème de Gauss–d'Alembert (1/4)

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n$ sur un corps $\mathbb{K}$ admet au plus $n$ racines dans $\mathbb{K}$. S'il admet $n$ racines $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{K}$, éventuellement avec répétitions, alors il factorise comme $P = u(X - r_1) \cdots (X - r_n)$.

En général tel n'est pas le cas : penser à $X^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, par contre, tout polynôme se factorise ainsi :

## Théorème (de Gauss–d'Alembert)

*Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n$ il existe $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{C}^\times$ tels que $P = u(X - r_1)(X - r_2) \cdots (X - r_n)$.*

**Stratégie :** Il suffit de montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\geq 1$ admet ***une*** racine $z \in \mathbb{C}$. En factorisant $P = (X - z)Q$ on obtient $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $\deg Q = \deg P - 1$, puis on conclut par récurrence.

(Cette astuce peut également être utile pour le calcul pratique.)

Nous présentons ici la preuve d'Argand (1814) et de Cauchy (1820). Elle procède par deux étapes, d'abord globale puis locale.

# Le théorème de Gauss–d'Alembert (2/4)

Pour montrer l'existence d'une racine nous utiliserons deux résultats :

## Théorème

*La fonction* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *vérifie* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *et tout* $z \in \mathbb{C}$ *s'écrit comme* $z = r\exp(i\theta)$ *où* $r = |z|$ *et* $\theta \in [0, 2\pi[$. □

Ceci nécessite la construction de la fonction $\exp$ puis la preuve des propriétés énoncées. Tout ceci a été établi ci-dessus.

## Théorème

*Toute fonction continue* $h\colon X \to \mathbb{R}$ *sur un compact* $X \subset \mathbb{R}^n$ *atteint son minimum : il existe* $x_0 \in X$ *tel que* $h(x_0) \leq h(x)$ *pour tout* $x \in X$. □

Rappelons qu'une partie $X \subset \mathbb{R}^n$ est compacte
si et seulement si elle est bornée et fermée.
En l'occurrence $X$ sera le disque fermé $\bar{B}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

⚠ La compacité est cruciale ! $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $h(z) = \frac{1}{1+|z|^2}$ n'a pas de minimum : quelque soit $z_0 \in \mathbb{C}$ il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $h(z_1) < h(z_0)$.
Bien sûr $\inf\{h(z) \mid z \in \mathbb{C}\} = 0$, mais cette valeur n'est pas atteinte.

# Le théorème de Gauss–d'Alembert (3/4)

## Lemme (existence d'un minimum global)

*Soit* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *une fonction polynomiale, définie par* $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *où* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$*.*

*Alors la fonction* $|f|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *atteint son minimum : il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que* $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$*.*

**Démonstration.** C'est clair pour une fonction constante $f(z) = a_0$. Il reste à analyser le cas où $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned}
& a_n z^n = f(z) - a_{n-1} z^{n-1} - \cdots - a_1 z - a_0 \\
\Rightarrow \quad & |a_n z^n| \leq |f(z)| + |a_{n-1} z^{n-1}| + \cdots + |a_1 z| + |a_0| \\
\Rightarrow \quad & |f(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \cdots - |a_1||z| - |a_0|
\end{aligned}$$


Le minorant à droite tend vers $+\infty$ pour $|z| \to +\infty$. Il existe alors $r \geq 0$ tel que $|f(z)| > |a_0|$ pour $|z| > r$.

Soit $\mu = \inf\{\, |f(z)| \mid z \in \mathbb{C} \,\}$. On a $\mu \leq |f(0)| = |a_0|$. Ainsi $\mu = \inf\{\, |f(z)| \mid z \in \bar{B}(0,r) \,\}$ où $\bar{B}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

Puisque $|f|\colon \bar{B}(0,r) \to \mathbb{R}$ est continue et $\bar{B}(0,r)$ est compact, le minimum est atteint : il existe $z_0 \in \bar{B}(0,r)$ tel que $|f(z_0)| = \mu$. $\square$

# Le théorème de Gauss–d'Alembert (4/4)

## Lemme (analyse d'un minimum local)

*Soit* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *une fonction polynomiale de degré* $n \geq 1$*.*

*Si* $|f(z_0)| > 0$ *alors* $|f(z_0)|$ *n'est pas un minimum local :*
*il existe* $z_1 \in \mathbb{C}$ *arbitrairement proche de* $z_0$ *tel que* $|f(z_1)| < |f(z_0)|$*.*

**Démonstration.** On définit $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $g(z) = f(z + z_0)/f(z_0)$.
Nous allons montrer que $|g(0)| = 1$ n'est pas un minimum local de $|g|$.
La fonction $g$ est polynomiale de même degré $n$, donc
$g(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n$ où $b_k, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ et $b_k, b_n \neq 0$.

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $b_k e^{ik\theta} = -|b_k|$. Pour $z = re^{i\theta}$ on trouve
$g(re^{i\theta}) = 1 + b_k r^k e^{ik\theta} + \cdots + b_n r^n e^{in\theta} = 1 - |b_k| r^k + \cdots + b_n r^n e^{ik\theta}$.

Ainsi $|g(re^{i\theta})| \leq \big|\, 1 - |b_k| r^k \,\big| + \cdots + |b_n| r^n$. Pour $0 \leq r \leq |b_k|^{-1/k}$
ceci devient $|g(re^{i\theta})| \leq 1 - r^k \big(|b_k| - |b_{k+1}| r - \cdots - |b_n| r^{n-k}\big)$.

Pour $r > 0$ assez petit le terme en parenthèse est positif.
On conclut que $|g(z)| < 1$, donc $|g(0)| = 1$ n'est pas minimal. $\square$

Ces deux lemmes prouvent le théorème de Gauss–d'Alembert :
il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|f(z_0)| = \min|f|$, puis $f(z_0) = 0$.

# Un mariage heureux d'algèbre et d'analyse

**Contexte historique :** Depuis le temps de Gauss, de nombreuses (variantes de) preuves de ce théorème important ont été publiées.

D'Alembert (1746) publia la première preuve, encore incomplète.
Gauss (1799) publia la première preuve acceptée comme rigoureuse.
Argand (1814) utilisa le principe du minimum comme présentée ici.
Cauchy (1820) compléta et popularisa la preuve d'Argand.

**Algèbre ou analyse ?** En dehors de la France, le théorème de Gauss–d'Alembert s'appelle « théorème fondamental de l'algèbre », en anglais « fundamental theorem of algebra », ou en allemand « Fundamentalsatz der Algebra » d'après Gauss.

Il parle des polynômes, certes, mais c'est aussi un théorème d'analyse, car $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des constructions d'analyse.

**Nous souhaitons un algorithme constructif !**
Nous savons maintenant que toutes les racines existent dans $\mathbb{C}$, mais la preuve ci-dessus ne les explicite pas : elle ne nous donne aucune indication comment les trouver / construire / approcher.
Nous y reviendrons plus loin.