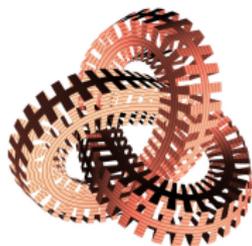


# Tresses, nœuds et entrelacs

Michael Eisermann

Institut für Geometrie und Topologie  
Universität Stuttgart

Conférence/atelier le 25 octobre 2009  
Document mis à jour le 28 octobre 2009



Journées nationales de l'APMEP à Rouen, 24–27 octobre 2009  
[www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/popularisation/#noeuds](http://www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/popularisation/#noeuds)

# Introduction

Des nœuds, des tresses et d'autres objets noués apparaissent non seulement dans la vie quotidienne, la marine et l'art décoratif, mais aussi en sciences. En biologie moléculaire, par exemple, l'ADN d'une bactérie peut être noué, et généralement il l'est. En physique, certains modèles théoriques font apparaître des structures qui ressemblent à des tresses.

En mathématiques, finalement, l'étude des nœuds sert à comprendre la géométrie et la topologie des espaces de dimension 3. Ainsi s'est établie, notamment depuis les découvertes spectaculaires des années 1980, une véritable théorie des nœuds, qui relie diverses branches scientifiques que l'on pensait auparavant éloignées. Même à un niveau élémentaire le sujet révèle une richesse surprenante et des structures inattendues...

Voici deux bouquins sympathiques et plutôt accessibles :

 A. Sossinsky : *Nœuds*, Éditions du Seuil, 1999

 C. Adams : *The Knot Book*, American Mathematical Society, 2004

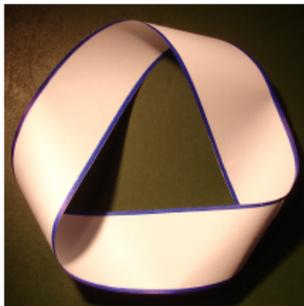
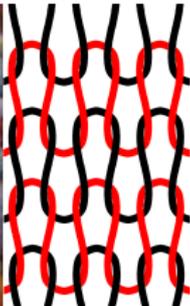
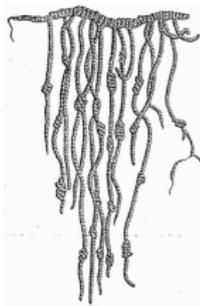
L'objectif de cet exposé n'est pas de vous impressionner avec des résultats compliqués. Mon objectif est de vous faire plaisir avec quelques phénomènes compréhensibles. Ainsi j'ai choisi trois expériences ludiques que vous pouvez faire tout à l'heure et que j'aimerais vous expliquer dans la suite.

[Certes, dans ce document écrit je ne pouvais m'empêcher d'inclure de nombreux compléments qui ne rentraient pas dans l'exposé.]

# Plan de l'exposé

- 1 Origines historiques et motivations
  - Des objets noués se trouvent partout !
  - Gauss et Kelvin, deux précurseurs au 19e siècle
  - Trois phénomènes motivants... à explorer
- 2 Tresses
  - Comment modéliser les tresses ?
  - Comment calculer avec les tresses ?
  - Application aux tresses de Dirac
- 3 Nœuds
  - Comment modéliser les nœuds ?
  - Comment calculer avec les nœuds ?
  - Existe-t-il des nœuds inverses ?
- 4 Entrelacs
  - La question de la chiralité
  - La vrille et le nombre d'enlacement
  - Le crochet de Kauffman et le polynôme de Jones

# Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel



# Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

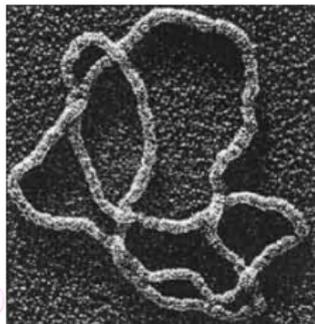
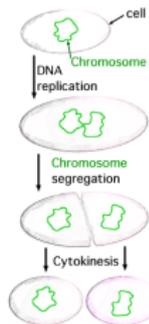
Les nœuds apparaissent, bien sûr, dans la vie quotidienne : comme outil en alpinisme, comme nœuds marins, comme nœuds de cravates, comme décoration, comme tricot, voire même comme système d'écriture !

- « Quipu » signifie *nœud* en quechua, une langue inca toujours parlée par environ dix millions de locuteurs dans des régions des Andes. Le terme désigne les objets qu'utilisait l'administration inca pour toute la gestion économique et sociale de l'empire : un quipu représente des entiers naturels à l'aide de successions de nœuds le long de cordelettes de laine de lama. Les quipus semblent également avoir constitué un outil de communication dans l'ancien Pérou. (Wikipédia, [fr.wikipedia.org/wiki/Quipu](http://fr.wikipedia.org/wiki/Quipu))

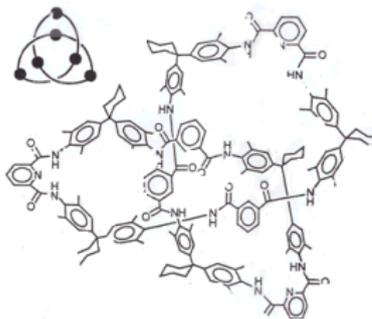
Ce qui est plus surprenant encore, c'est que les nœuds apparaissent aussi dans les sciences.

- En biologie moléculaire, par exemple, l'ADN d'une bactérie est circulaire, il peut donc être noué. Lors de la division cellulaire il est pourtant vitale de séparer les deux copies du chromosome afin de les transmettre de la « cellule-mère » aux deux « cellules-filles ».
- En physique, certains modèles théoriques font apparaître des structures qui ressemblent beaucoup à des tresses.
- En mathématiques, finalement, l'étude des nœuds sert à comprendre la géométrie et la topologie des espaces de dimension 3.

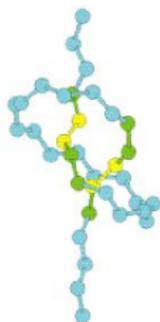
# Des objets noués se trouvent aussi en sciences



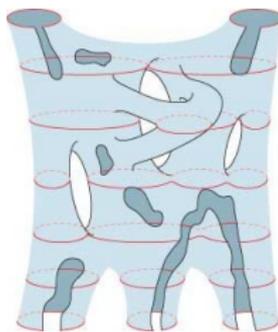
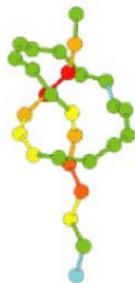
(a) Biologie moléculaire



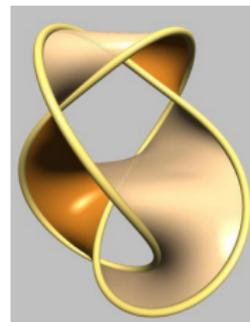
(b) Chimie



(c) Nanotech



(d) Physique théorique



(e) Mathématique

FIG.: Des objets noués en sciences

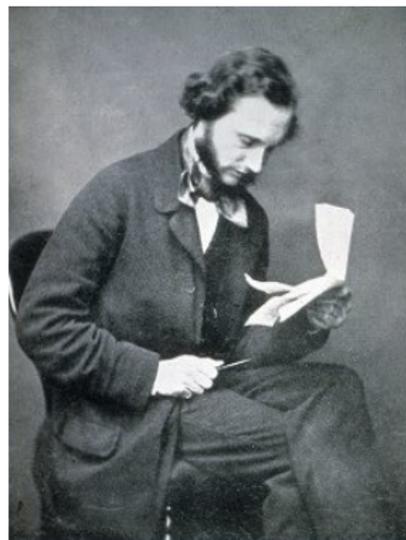
## Deux précurseurs célèbres au 19e siècle

Carl Friedrich Gauss  
(1777-1855)



Mathématicien, physicien et astronome allemand, professeur à Göttingen

William Thomson, Lord Kelvin  
(1824-1907)



Physicien britannique né en Irlande, professeur à Glasgow

📖 A. Ranicki, *History of Knot Theory*, [www.maths.ed.ac.uk/~aar/knots](http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/knots)

# Origines historiques de la théorie des nœuds

Gauss a apporté d'importantes contributions aux mathématiques, à la physique, et à l'astronomie. Il est considéré comme un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Lors de son étude de l'électromagnétisme il étudia des nœuds et des entrelacs. Par curiosité intellectuelle, semble-t-il, il a aussi regardé des tresses. Son élève Listing a écrit le premier traité de « topologie » : il a même inventé ce terme qui signifie à peu près « la science de la position mutuelle des objets » donc la « géométrie qualitative ».

Kelvin est connu pour ses travaux en thermodynamique, et on lui doit l'échelle Kelvin des températures. Il travailla aussi sur la théorie et l'application de l'électricité. Pour ses contemporains il devint célèbre pour ses contributions cruciales au premier câble transatlantique. C'était une réussite technologique de tout premier plan, qui lui a valu son titre de noblesse en 1866.

En 1867 Kelvin proposa sa théorie atomique, suivant laquelle les atomes sont des nœuds dans l'éther. À l'époque cette théorie était tout à fait compétitive et fut étudiée pendant deux décennies, avant d'être abandonnée au profit des modèles concurrents qui expliquaient mieux les expériences.

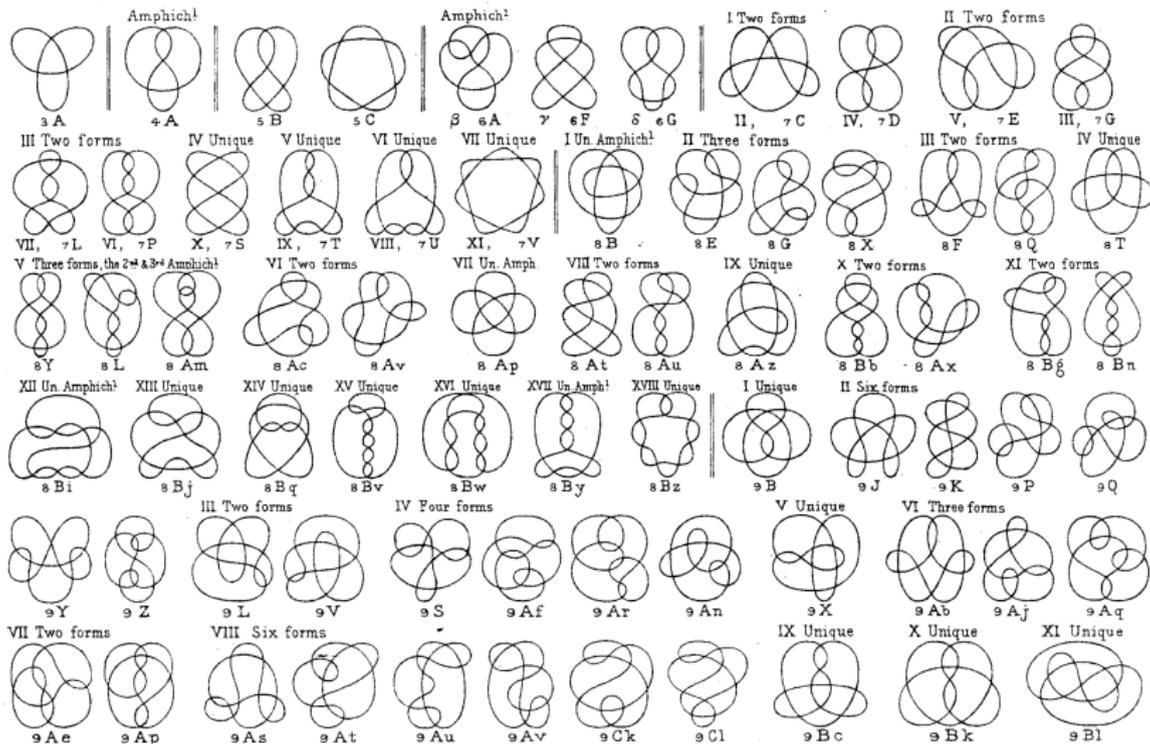
Motivés par Kelvin, les physiciens Tait, Little et Kirkman se sont mis à élaborer – durant 20 ans ! – la table des nœuds jusqu'à 9 croisements. Le problème est d'établir une liste complète, sans oublier aucun nœud, et sans doublons. (Même à nos jours ce problème de classification reste très difficile.)

# Tabulation empirique par Tait–Little–Kirkman, 1870–1890

Trans. Roy Soc Edin<sup>r</sup>

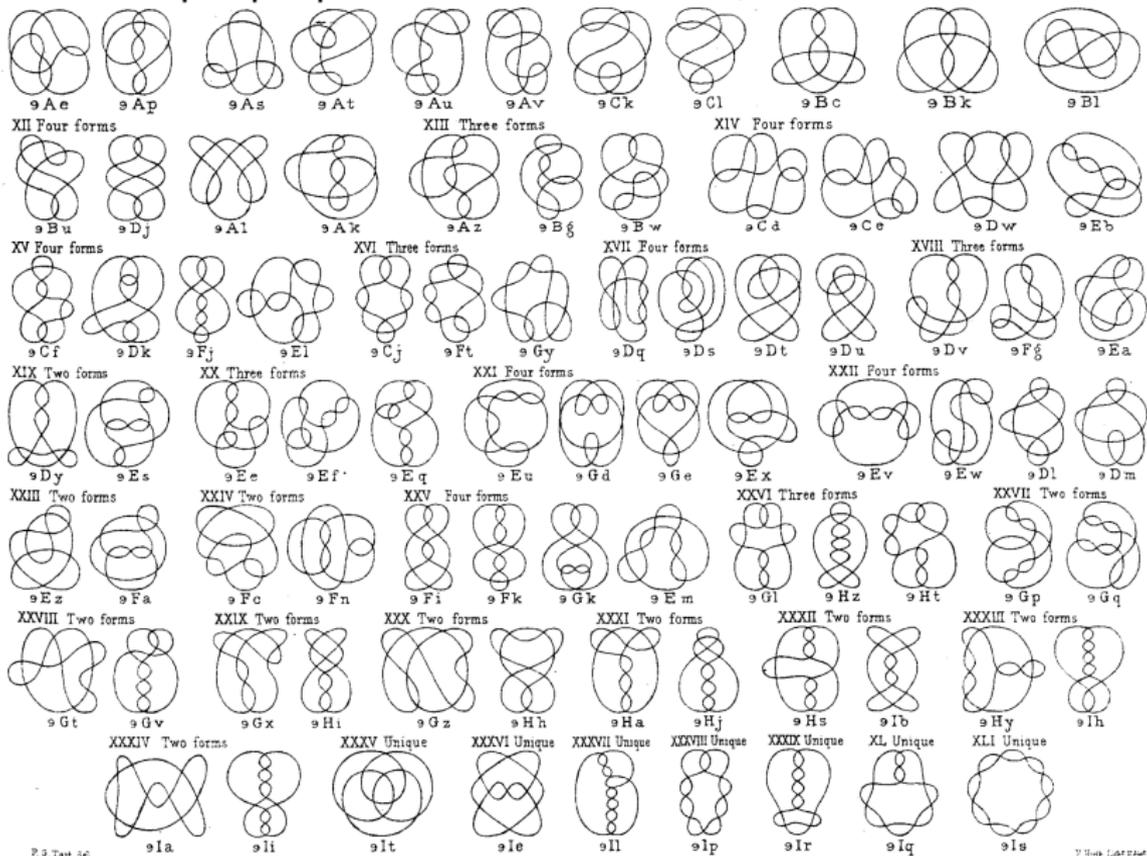
THE FIRST SEVEN ORDERS OF KNOTTINESS.

Vol XXXII, Pl. XLIV



Ce formidable travail fut essentiellement empirique, les outils dominants étant crayon et gomme. Ce n'est qu'au 20e siècle que des outils mathématiques furent développés, notamment en topologie algébrique.

# Tabulation empirique par Tait–Little–Kirkman, 1870–1890



 D. Bar-Natan *et al.*, *The Knot Atlas*, [katlas.math.toronto.edu](http://katlas.math.toronto.edu)

# 1ère expérience : tresses de Dirac — le phénomène de spin

La tresse suivante  $\tau$  est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?



La tresse  $\tau^2$  est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?



Pour ces questions il faudra préciser le modèle puis établir des outils :

- Qu'est-ce qu'une tresse ? Quels mouvements sont autorisés ?
- Qu'est-ce qu'une tresse de Dirac ? Quels mouvements sont autorisés ?
- Quelles obstructions peut-il y avoir pour transformer une tresse en une autre ?

## 2nde expérience : jonglage topologique — qu'est-ce qui est possible ?



### Une expérience mathémagique

Peut-on *nouer* une corde par un geste d'une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde de la même manière ?



Pour ces questions il faudra préciser le modèle puis établir des outils :

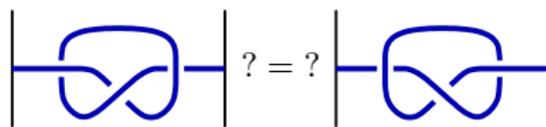
- Qu'est-ce qu'un nœud ? Quels mouvements sont autorisés ?
- Que dire de la concaténation des nœuds ?
- Existe-t-il des éléments inverses, ainsi dire des « anti-nœuds » ?



### 3ème expérience : images miroirs — la question de chiralité

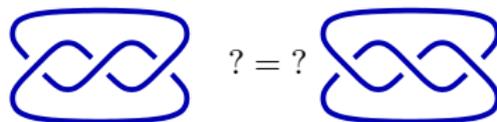
Question de Listing (1847), résolue par Dehn (1914) :

Le nœud de trèfle est-il égal à son image miroir ?



le nœud de trèfle

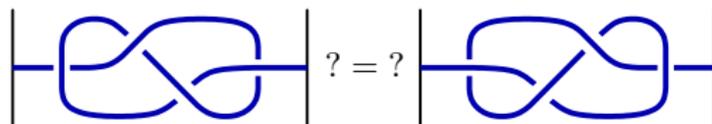
son image miroir



le nœud de trèfle fermé

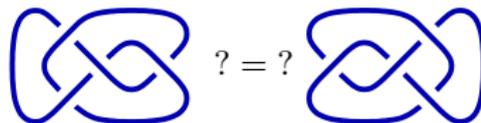
son image miroir

Le nœud de huit est-il égal à son image miroir ?



le nœud d'huit

son image miroir



le nœud d'huit fermé

son image miroir

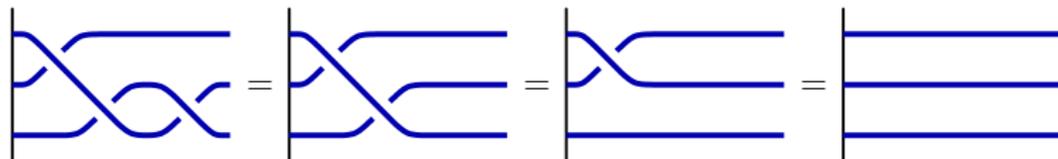
# Comment modéliser les tresses ?

Un premier modèle :



Propriété importante : les brins sont flexibles, ils peuvent bouger.

Mauvaise nouvelle : dans ce modèle toutes les tresses sont égales.



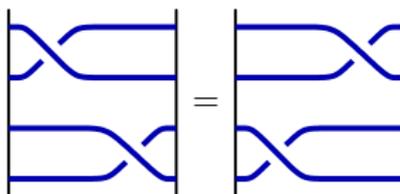
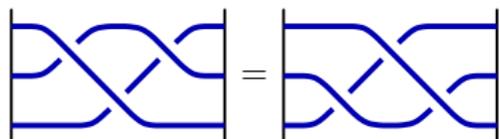
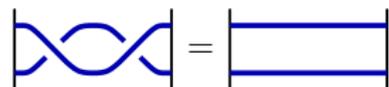
# Comment modéliser les tresses ?

Le bon modèle :



On fixe les extrémités  
à gauche et à droite !  
Au milieu les brins  
peuvent encore bouger.

Exemples (mouvements élémentaires) :

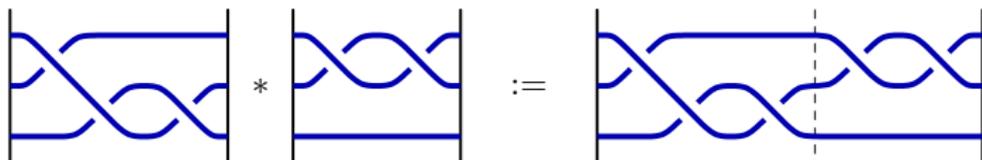


La longueur n'est pas essentielle :



## On peut concaténer les tresses !

Les tresses à  $n$  brins jouissent d'une concaténation naturelle :



Questions naturelles :

- 1 La concaténation des tresses est-elle associative ?

$$(A * B) * C = A * (B * C)$$

- 2 Est-elle commutative ?

$$A * B = B * A$$

- 3 Admet-elle un élément neutre ?

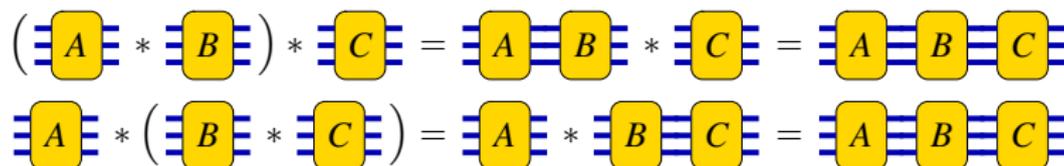
$$A * 1 = A \quad \text{et} \quad 1 * A = A$$

- 4 Pour une tresse  $A$  donnée, y a-t-il une tresse inverse ?

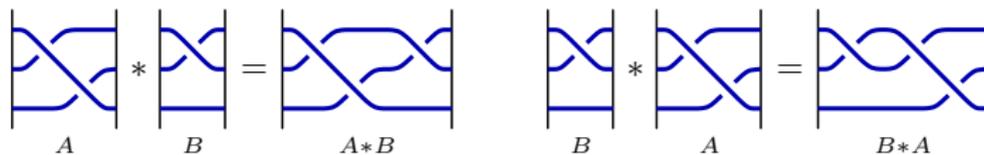
$$A * A^{-1} = 1 \quad \text{et} \quad A^{-1} * A = 1$$

# La concaténation des tresses

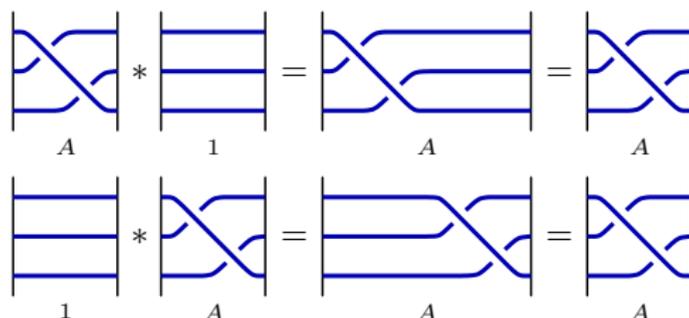
Est-elle associative ? Oui !



Est-elle commutative ? Non !

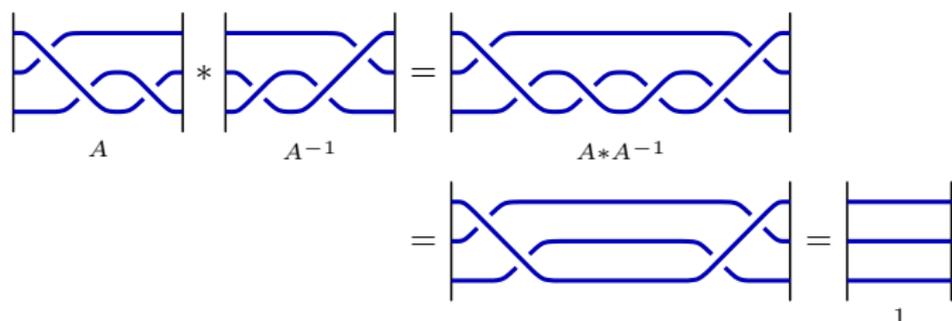


Admet-elle un élément neutre ? Oui !



## La concaténation des tresses (suite)

Existe-t-il des éléments inverses ? Oui !



### Définition (groupe)

Un ensemble avec une opération ayant ces propriétés est appelée *un groupe*.

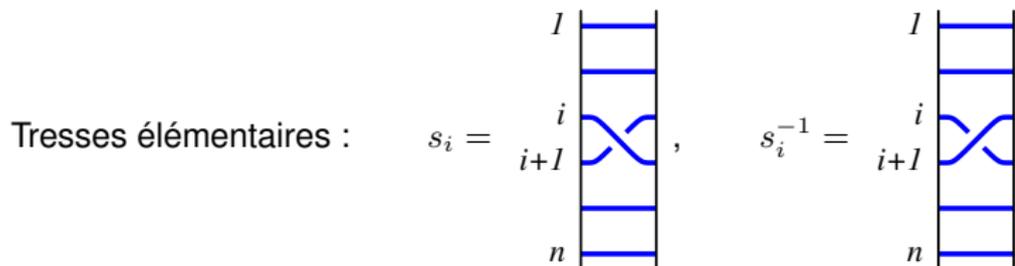
### Théorème (Emil Artin 1925)

*Les tresses à  $n$  brins avec leur concaténation forment un groupe.*

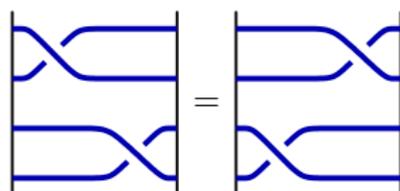
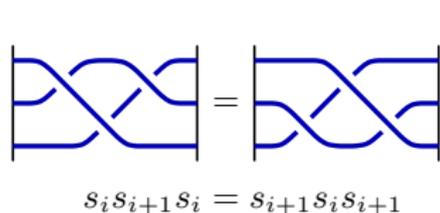
Pour  $n \geq 3$  il est non commutatif : on a vu que  $A * B \neq B * A$ .

Notation : On note ce groupe par  $(\mathbf{B}_n, *)$  pour « **braid** » (anglais).  
Par commodité on écrit simplement  $AB$  au lieu de  $A * B$ .

# Présentation algébrique du groupe des tresses



Relations élémentaires : nous avons  $s_i s_i^{-1} = s_i^{-1} s_i = 1$ , bien sûr, puis



$$s_i s_j = s_j s_i \text{ où } |i - j| \geq 2$$

## Théorème (Emil Artin 1925)

Le groupe  $B_n$  des tresses à  $n$  brins admet la présentation

$$\mathbf{B}_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{ll} s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{si } |i - j| = 1 \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \end{array} \right\rangle.$$

## Commentaires sur la présentation d'Artin

La tresse élémentaire  $s_i$  twisté les brins  $i$  et  $i + 1$  par un demi-tour positif (suivant la règle de la main droite) et ne bouge pas les autres brins.

Puisque l'on travaille dans un groupe,  $s_i$  admet un inverse, noté ici  $s_i^{-1}$ .

La tresse  $s_i^{-1}$  twisté les brins  $i$  et  $i + 1$  par un demi-tour négatif.

Les relations élémentaires sont précisément les mouvements constatés au tout début de notre discussion. Les tresses élémentaires nous permettent de traduire ces mouvements graphiques en relations algébriques.

Le théorème d'Artin contient deux affirmations :

- Toute tresse, aussi compliquée qu'elle soit, s'écrit comme concaténation des tresses élémentaires  $s_i$  et  $s_i^{-1}$ . Autrement dit, nous pouvons coder des tresses par des mots en  $s_i$  et  $s_i^{-1}$ . Ceci permet, par exemple, de transmettre commodément la description d'une tresse par téléphone.
- Tout mouvement d'une tresse, aussi compliqué qu'il soit, se traduit en une suite fini de mouvements élémentaires. Au niveau algébrique ceci veut dire que deux mots présentent la même tresses si et seulement si l'un se transforme en l'autre par une suite fini des relations élémentaires.

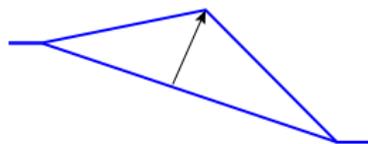
Nous pouvons utiliser cette présentation algébrique pour implémenter les tresses sur ordinateur et ainsi faire des calculs dans le groupe  $\mathbf{B}_n$ . Ceci a provoqué des questions algorithmiques et suscité pas mal de recherches. Récemment on discute même des applications en cryptographie.

## Complément : démonstration du théorème d'Artin

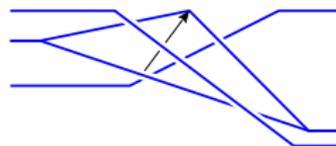
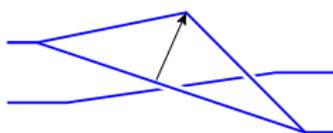
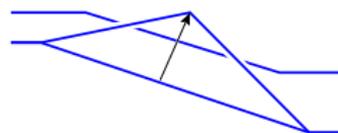
Toute tresse  $\beta$  peut être rendue polygonale (càd affines par morceaux).

En position générale la projection de  $\beta$  donne donc un diagramme planaire. Lisant les croisements de gauche à droite on obtient un mot en  $s_1^{\pm 1}, \dots, s_{n-1}^{\pm 1}$ . Ainsi  $\beta$  est équivalente à une concaténation de tresses élémentaires.

Deux tresses polygonales sont équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes par des mouvements polygonaux :



Trois cas élémentaires peuvent se produire :



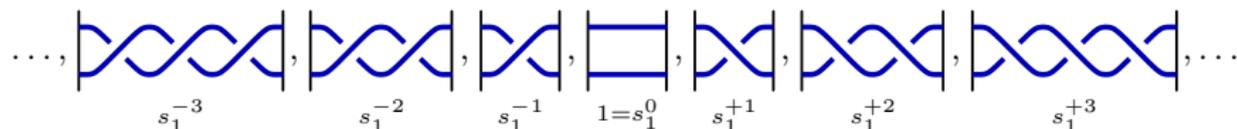
- 1 On crée une paire de croisements opposés :  $1 = s_i^{-1} s_i$ .
- 2 On déplace un croisement par rapport aux autres :  $s_i s_j = s_j s_i$ .
- 3 On pousse un brin au-dessus d'un croisement :  $s_{i+1} s_i s_{i+1} = s_i s_{i+1} s_i$ .

En subdivisant assez finement, on se ramène aux trois cas élémentaires.  $\square$

## Essayons de comprendre ces groupes des tresses...

$n = 1$  : Avec un seul brin il n'y a que la tresse triviale : 

$n = 2$  : Regardons les tresses à 2 brins :



Le nombre de croisements n'est pas un invariant, il peut changer !

Exemple : 

$s_1^{+1}$        $s_1^{+1} * s_1^{+1} * s_1^{-1}$        $s_1^{+3}$

Ce qui compte est la vrille  $v: \{\text{tresses}\} \rightarrow \{\text{nombre entiers}\}$  définie par

$$v\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) = +1, \quad v\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = -1, \quad v(A * B) = v(A) + v(B).$$

**Corollaire (de la présentation d'Artin)**

*Les tresses à 2 brins sont classifiées par leur vrille,  $v: (\mathbf{B}_2, *) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}, +)$ .*

Ainsi les tresses à 2 brins avec leur concaténation correspondent aux nombres entiers avec leur addition : la vrille est un *isomorphisme* de groupes.

## La vrille est un invariant

### Corollaire (de la présentation d'Artin)

Pour tout  $n$  la vrille définit un morphisme de groupes  $v: \mathbf{B}_n \rightarrow \mathbb{Z}$  tel que

$$v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nwarrow \\ \nearrow \end{array}\right) = +1, \quad v\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nwarrow \end{array}\right) = -1, \quad v(A * B) = v(A) + v(B).$$

Par exemple, on trouve que  $v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = +1 + 1 - 1 = 1$

Vérifions que c'est bien un invariant :  $v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right),$

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right), \quad v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right).$$

Bien entendu, pour  $n \geq 3$  la vrille ne suffit plus pour classer les tresses : les entiers sont commutatifs, alors que les tresses ne le sont pas !

### Recherche récente (de 1984 à présent)

On peut étudier, voire classer, les tresses à l'aide de matrices.

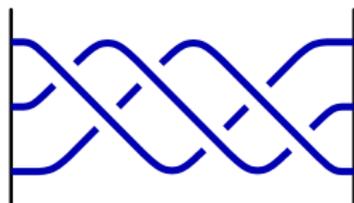
## Complément : le centre de $B_n$

Nous avons vu que le groupe  $B_n$  est non commutatif pour  $n \geq 3$ .  
Certaines tresses commutent, par exemple  $s_i$  et  $s_j$  pour  $|i - j| \geq 2$ .  
Existe-t-il des tresses qui commutent avec toutes les autres ?

### Définition

Une tresse  $\gamma \in B_n$  est dite *centrale* si  $\gamma * \alpha = \alpha * \gamma$  pour tout  $\alpha \in B_n$ .

Dans  $B_n$  la tresse  $\tau = (s_1 s_2 \cdots s_{n-1})^n$  représente un tour complet :



La tresse  $\tau$  est centrale. Par conséquent,  $\tau^k$  est centrale quelque soit  $k \in \mathbb{Z}$ .  
En fait, nous venons d'épuiser déjà tous les exemples :

### Théorème (admis)

Toute tresse centrale est de la forme  $\tau^k$  pour un certain  $k \in \mathbb{Z}$ . □

## Complément : une représentation $\mathbf{B}_3 \rightarrow \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$

Si vous connaissez les matrices, vous pouvez vérifier les calculs suivants :

La matrice  $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible,  $S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

La matrice  $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible,  $S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Elles vérifient la relation  $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Corollaire (de la présentation d'Artin)

*Nous avons une représentation  $\phi: \mathbf{B}_3 \rightarrow \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$  telle que  $\phi(s_1) = S_1$  et  $\phi(s_2) = S_2$ . (On sous-entend que  $\phi(\alpha * \beta) = \phi(\alpha) \cdot \phi(\beta)$  pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbf{B}_3$ .)*

**Démonstration.** C'est une conséquence de la présentation

$$\mathbf{B}_3 = \langle s_1, s_2 \mid s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2 \rangle.$$

Toute tresse  $\beta$  s'écrit comme un mot dans les lettres  $s_1$  et  $s_2$  (et leur inverse).

On définit  $\phi(\beta)$  comme le même mot dans  $S_1$  et  $S_2$  (et leur inverse).

Bien sûr le mot représentant  $\beta$  n'est pas unique, mais les différents mots possibles ne diffèrent que par la relation  $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ , et ces modifications ne changent pas le résultat  $\phi(\beta)$  car  $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2$ .  $\square$

Par exemple,  $\phi(\tau) = \phi((s_1 s_2)^3) = (S_1 S_2)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

D'un autre côté on a  $\tau = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2 = s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 s_1 = (s_1 s_2 s_1)^2$ .

Ainsi  $\phi(\tau) = \phi((s_1 s_2 s_1)^2) = (S_1 S_2 S_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Quelque soit le cheminement, le résultat est bien défini !

## Complément : classification des tresses à 3 brins

Nous avons calculé que  $\phi(\tau) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Par conséquent  $\phi(\tau^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

La représentation  $\phi: \mathbf{B}_3 \rightarrow \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$  construite n'est donc pas fidèle : elle ne distingue pas la tresse  $\tau^2$  et la tresse triviale. C'est son seul défaut :

### Théorème (admis)

*Si une tresse  $\beta \in \mathbf{B}_3$  vérifie  $\phi(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  alors  $\beta = \tau^{2k}$  pour un  $k \in \mathbb{Z}$ .*

### Corollaire

*Si  $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ , alors  $\alpha = \beta\tau^{2k}$  pour un  $k \in \mathbb{Z}$ .*

**Démonstration.** Si  $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ , alors  $\phi(\alpha\beta^{-1}) = \phi(\alpha)\phi(\beta)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi  $\alpha\beta^{-1} = \tau^{2k}$  pour un  $k \in \mathbb{Z}$ , ce qui veut dire que  $\alpha = \beta\tau^{2k}$ .  $\square$

### Corollaire

*La représentation  $\phi$  et la vrille  $v$  classifient les tresses à 3 brins.*

**Démonstration.** Si  $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ , alors  $\alpha = \beta\tau^{2k}$ .

Si en plus  $v(\alpha) = v(\beta)$ , alors  $k = 0$  et  $\alpha = \beta$ .  $\square$

Ce beau résultat donne un algorithme pour reconnaître les tresses à 3 brins.

### Théorème (Krammer, Bigelow 2001)

*Pour tout  $n$  il existe une représentation fidèle  $\mathbf{B}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_m\mathbb{R}$ .*

## Complément : le groupe $B_n$ est ordonnable

Le groupe  $B_2 = \{ s_1^k \mid k \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}$  est ordonnable :  
les tresses « positives »  $P = \{ s_1^k \mid k > 0 \}$  vérifient

- 1  $B_2 = P \sqcup \{1\} \sqcup P^{-1}$  (Trichotomie)
- 2  $P * P \subset P$  (Stabilité par concaténation)

Ceci permet de définir l'ordre  $a < b$  par  $a^{-1}b \in P$  :

- 1 On a soit  $a < b$  soit  $a = b$  soit  $b < a$ . (Antisymétrie)
- 2 Si  $a < b$  et  $b < c$ , alors  $a < c$ . (Transitivité)

À la surprise générale, Patrick Dehornoy découvrit en 1992 que  
tout groupe  $B_n$  est ordonnable, quelque soit le nombre  $n$  de brins :

### Théorème (Dehornoy 1992)

*Le groupe des tresses  $B_n$  peut être ordonné, les éléments positifs étant*

$$P = \{ b_0 s_i b_1 \cdots s_i b_k \mid 1 \leq i < n, k \geq 1, b_0, b_1, \dots, b_k \in \langle s_{i+1}, \dots, s_{n-1} \rangle \}$$

**Démonstration.** La stabilité  $P * P \subset P$  est très facile à voir.

La trichotomie  $P \sqcup \{1\} \sqcup P^{-1}$  est difficile et nous l'admettons ici. □

### Remarque

Il existe des algorithmes efficaces pour déterminer si une tresse est positive, négative, ou triviale. Ceci permet de classifier les tresses à  $n$  brins.

## Frise chronologique

Depuis toujours : usages pratiques et décoratifs

⋮  
≈ 1830 C.-F. Gauss (Göttingen) : quelques essais sur les tresses

⋮  
1867 W. Thomson [Lord Kelvin] : atomes comme nœuds dans l'éther

1870-1890 P.G. Tait, C.N. Little, T.P. Kirkman : tabulation empirique

⋮  
1924 J.W. Alexander (Princeton) : nœuds sous forme de tresses

1925 E. Artin (Hambourg) : première étude du groupe des tresses

1945 A.A. Markov (Moscou) : correspondance entre tresses et nœuds

⋮  
1984 V. Jones (Berkeley) : représentations « quantiques » des tresses et invariants « quantiques » des nœuds (Médaille Fields 1990)

⋮  
1994 P. Dehornoy (Caen) : le groupe des tresses est ordonnable.

⋮  
2001 D. Krammer, S. Bigelow : représentation fidèle par des matrices

⋮  
En mathématiques, tout était déjà connu à nos ancêtres ? Loin de cela !  
Les mathématiques sont bien vivantes et évoluent constamment.

# À quoi ça sert ? À quoi servent les mathématiques ?

Il y a plusieurs motivations pour explorer ces structures mathématiques.

## ■ D'abord et avant tout, parce que c'est joli.

→ Je commence par ce point, parce que la compréhension de ces objets me procure beaucoup de plaisir. C'est un point de vue personnel, certes. Il se trouve que pour beaucoup de chercheurs c'est une raison suffisante pour y consacrer du temps.

## ■ L'être humain est curieux et ressent le désir de comprendre.

→ Observer des phénomènes, puis les analyser, est une activité profondément humaine. Si l'on ajoute un peu d'abstraction, on l'appelle mathématiques, du grec μαθηματική τέχνη [mathēmatikē téchnē], l'art de comprendre.

## ■ Les mathématiques s'inspirent du monde réel.

→ La *déduction* est une méthode efficace, certes, mais ce n'est pas tout ! La *motivation* et les questions intéressantes proviennent surtout des exemples, des observations, des conjectures, ... que l'on souhaite comprendre.

## ■ Les mathématiques sont efficaces.

→ Elles essaient d'extraire l'essentiel, le noyau dur du problème, ce que l'on appelle *abstraction*. Si un problème est difficile, il peut nécessiter la coopération de beaucoup de personnes, parfois sur plusieurs générations. Mais une fois élaborée, la solution s'applique à de nombreuses situations analogues. Ceci explique la « déraisonnable efficacité » des mathématiques, qui étonne et réjouit ses utilisateurs, et soutient la conviction que tout investissement intellectuel s'amortit tôt ou tard.

Ainsi les mathématiques fournissent un langage et des outils

... à court terme pour la question immédiate (mathématique),

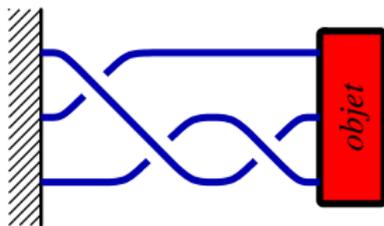
... à moyen terme pour les domaines qui s'en servent (sciences),

... à long terme pour les applications concrètes (technologie).

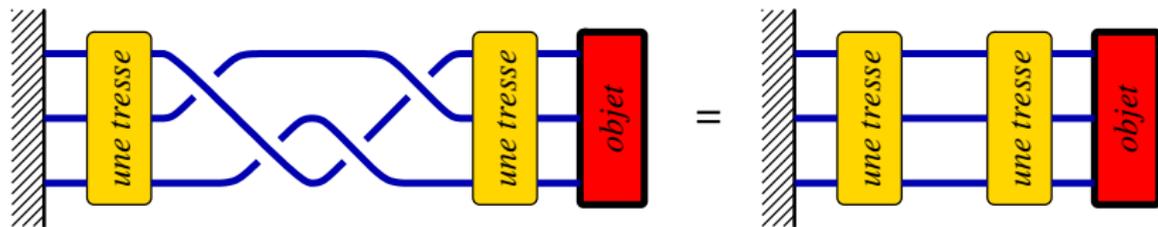
## Tresses de Dirac (théorie de l'électron, prix Nobel 1933)

Tresses de Dirac : on remplace le mur à droite par un objet mobile.

Restriction : il est autorisé de se déplacer mais pas de tourner.



Seul nouveau mouvement : on peut passer un brin *autour* de l'objet.



Théorème (Newman 1942 ; Fadell 1962)

*Les tresses de Dirac à  $n$  brins forment à nouveau un groupe.*

*Il s'agit de  $B_n$  modulo la relation supplémentaire  $s_1 \cdots s_{n-1} s_{n-1} \cdots s_1 = 1$ .*

## Le twist de Dirac

La tresse suivante  $\tau$  est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?



L'observation-clé :

$$v \left( \begin{array}{c} \text{Diagram of a full twist of two strands} \end{array} \right) - v \left( \begin{array}{c} \text{Diagram of two parallel strands} \end{array} \right) = 4$$

La tresse  $\tau^2$  est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?



## Commentaires

Pour les tresses standards – accrochées aux murs à droite et à gauche – nous avons vu que la vrille est un invariant, notée  $v: \mathbf{B}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Les tresses de Dirac (à  $n$  brins) admettent un mouvement supplémentaire : un brin peut passer autour de l'objet, ce qui change la vrille par  $\pm 2(n-1)$ .

Ici, pour  $n = 3$  brins, ce mouvement change donc la vrille par  $\pm 4$ .

Ainsi c'est la vrille modulo 4 qui est invariante. Comme  $v(\tau) = 6$  et  $v(1) = 0$  ne sont pas congrus modulo 4 nous avons forcément  $\tau \neq 1$ .

Pour la tresse  $\tau^2$  nous trouvons  $v(\tau^2) = 12$ , et ce nombre est bien congru à  $v(1) = 0$  modulo 4. L'obstacle de la vrille, qui nous a bien servi pour  $\tau$ , disparaît donc pour  $\tau^2$  : on peut se ramener à une tresse à vrille 0.

Est-ce suffisant ? Rappelons que la vrille ne classe pas les tresses à  $n \geq 3$  brins, et qu'il existe bien des tresses non triviales à vrille 0. Il pourrait donc y avoir d'autres obstacles. Pour le savoir il faut l'essayer !

# Jonglage topologique



## Une expérience mathématique

Peut-on *nouer* une corde par un geste d'une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde de la même manière ?



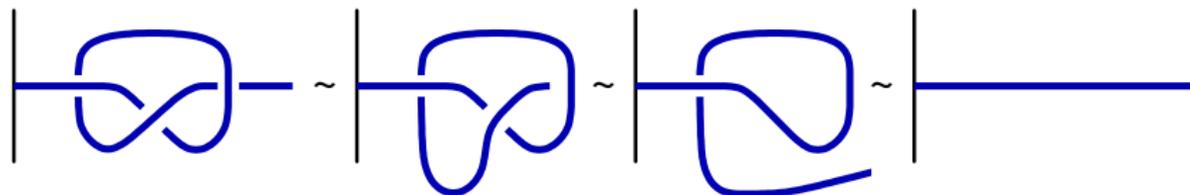
## Stratégies complémentaires :

- Pour prouver qu'un objectif peut être atteint, il suffit de le faire.  
En mathématiques on appelle cela une « preuve constructive ».
- Pour prouver que c'est impossible, il ne suffit pas d'échouer.  
Il faut identifier l'obstacle !

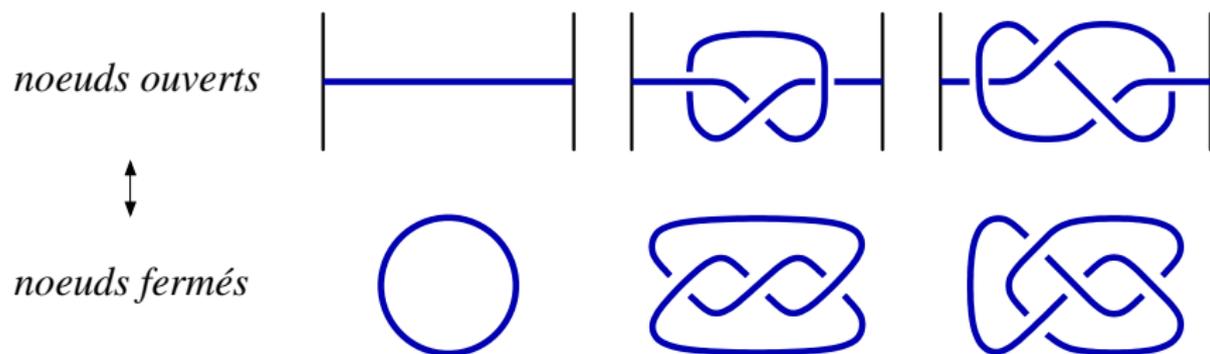
La première question est réglée. Pour la seconde il nous faudra des maths !

# Comment modéliser les nœuds ?

**Observation** — Dans un modèle trop naïf, tous les nœuds sont égaux :



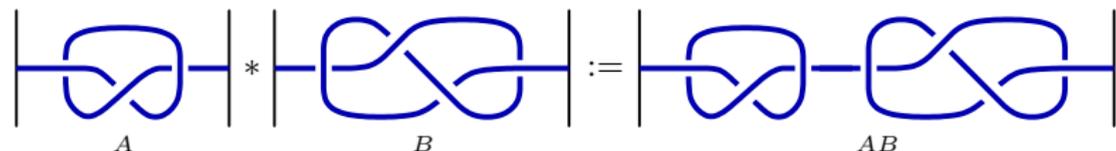
**Deux solutions** sont possibles et s'avèrent équivalentes :



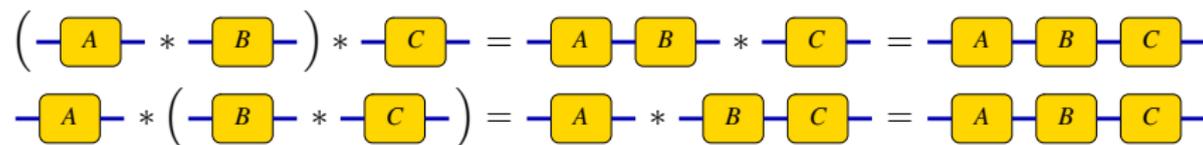
Comme avant le brin peut bouger.

# La concaténation des nœuds

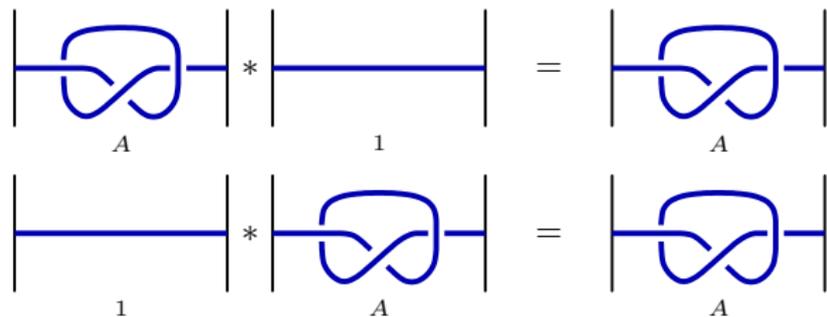
Les nœuds jouissent d'une concaténation naturelle :



Est-elle associative ?  $(A * B) * C = A * (B * C)$  ? Bien sûr !

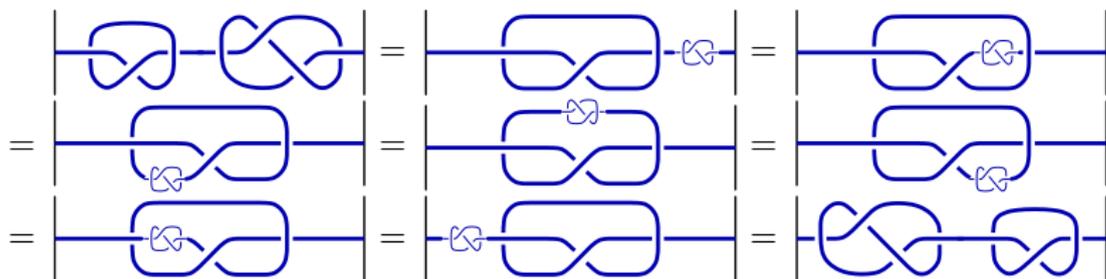


Admet-elle un élément neutre ?  $A * 1 = A$  et  $1 * A = A$  ? Bien sûr !

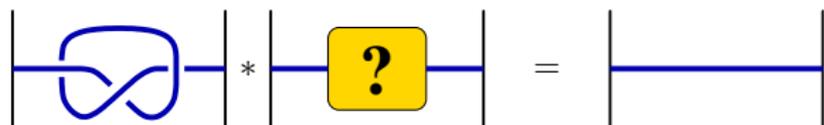


## La concaténation des nœuds (suite)

Est-elle commutative ?  $A * B = B * A$  ? Contrairement aux tresses, oui !



Existe-t-il des éléments inverses ?  $A * A^{-1} = 1$  et  $A^{-1} * A = 1$  ?



C'est notre question initiale concernant le « jonglage topologique » !

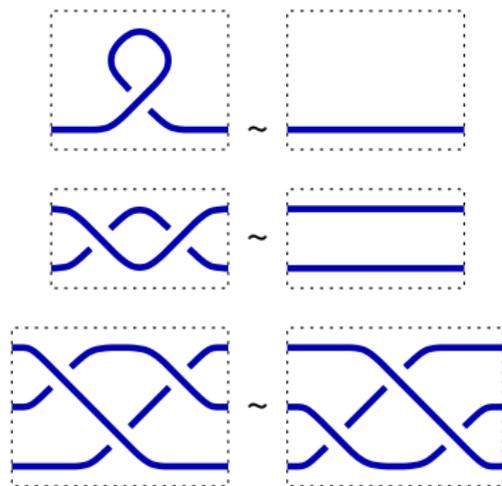
### Stratégies complémentaires :

- Pour prouver qu'un objectif peut être atteint, il suffit de le faire.
- Pour prouver qu'un objectif est impossible, il faut identifier l'obstacle !

Pour les nœuds inverses on vient de franchir la première étape : on a reformulé le problème en termes mathématiques.

## Mouvements de Reidemeister

Les mouvements locaux suivants modifient le *diagramme*, mais pas le *nœud* :



Ces trois mouvements locaux suffisent !

### Théorème (Reidemeister 1926)

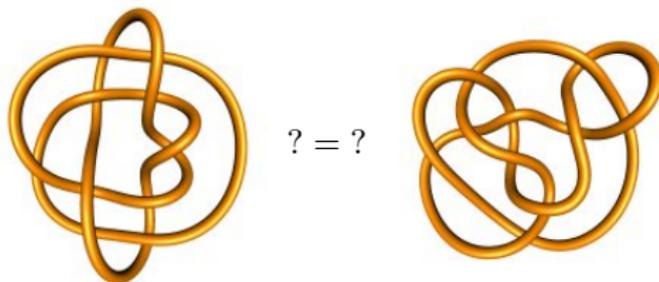
*Deux diagrammes représentent le même nœud si et seulement si l'un se transforme en l'autre par des mouvements de Reidemeister.*

### Démonstration.

On peut imiter la preuve du théorème d'Artin esquissée plus haut : les nœuds et leurs mouvements peuvent être rendus polygonaux. □

## Complément : la classification des nœuds est difficile

Problème de classification : étant donnés deux nœuds, disons sous forme de diagrammes planaires, comment déterminer s'ils sont équivalents ou non ?



Le théorème de Reidemeister ne fournit pas d'algorithme !

- Si vous avez la chance de trouver une suite de mouvements de Reidemeister menant de l'un à l'autre, alors ils sont équivalents.
- Si, après de longues tentatives, vous ne trouvez pas de telle transformation, la question reste en suspens.

### Exemple (la paire de Perko)

Depuis le 19<sup>e</sup> siècle on pensait les deux nœuds ci-dessus différents.

En 1974 l'avocat new-yorkais Kenneth Perko découvre qu'ils sont en fait équivalents ! Pour une telle transformation voir [www.knotplot.com/perko](http://www.knotplot.com/perko).

## Complément : même la reconnaissance du nœud trivial est difficile

Comment reconnaître les nœuds ? au moins le nœud trivial ?

À ce jour on ne connaît que des réponses partielles et/ou peu efficaces.



Exemple de  
L. Goeritz  
(1934)



Un de ces nœuds est trivial : lequel ? Comment le prouver ?

L'autre nœud est non trivial : lequel ? Comment le prouver ?

### Théorème (Hass & Lagarias 2001)

*Soit  $D$  un diagramme à  $n$  croisements. Si  $D$  représente le nœud trivial, alors on peut transformer  $D$  en un diagramme trivial par moins de  $2^{100000000000 \cdot n}$  mouvements de Reidemeister. (Ceci donne un algorithme théorique.)*

Les questions analogues pour les tresses sont plus faciles :

- Comment déterminer si deux tresses sont égales ?
- Comment déterminer si une tresse donnée est triviale ?

Artin (1925) : il existe une solution (peu efficace, exponentielle)

Dehornoy (1998) : il existe une solution efficace (polynomiale)

## Tricoloriages (Fox 1971)

Ajoutons des couleurs ! Prenons **bleu**, **rouge** et **vert**.



On colorie les arcs d'un diagramme selon les règles suivantes :

- 1 Le premier arc est colorié en bleu.
- 2 À chaque croisement se rencontrent soit toutes les trois couleurs, soit une seule couleur. (On interdit donc les croisements bicolores.)



### Définition

Pour tout diagramme  $D$  on note  $col(D)$  le nombre de ses tricoloriages.

Exemple : on trouve que  $col(A) = 3$  mais  $col(T) = col(T') = 1$ .

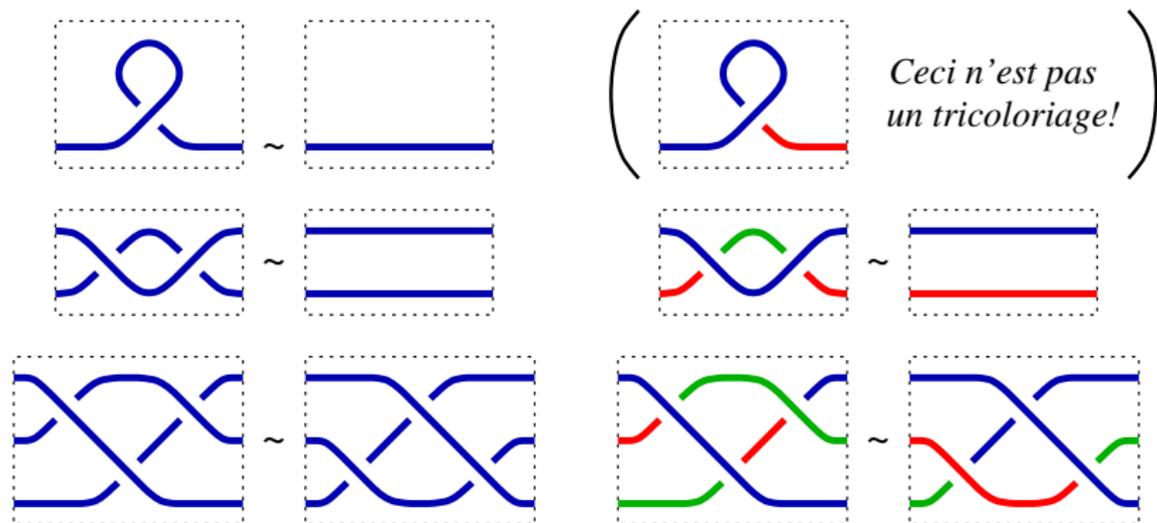
# Les tricoloriages sont invariants !

Théorème (Fox 1971)

Si  $D \sim D'$  alors  $\text{col}(D) = \text{col}(D')$ .

Par contraposé : si  $\text{col}(D) \neq \text{col}(D')$  alors  $D \not\sim D'$ .

**Démonstration.** Étudions les trois mouvements locaux de Reidemeister :



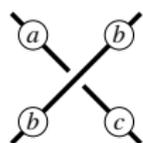
On fixe les couleurs à l'extérieur. Avant et après chaque mouvement il n'existe qu'une seule façon d'étendre le tricoloriage à l'intérieur.

## Complément : calcul modulo 3

On peut coder les trois couleurs bleu, rouge, vert par les nombres 0, 1, 2. Nous calculons modulo 3, c'est-à-dire que  $2 + 1 = 1 + 2 = 0$  et  $2 + 2 = 1$ .

### Reformulation algébrique de la règle de tricoloriage

Autour de chaque croisement la somme alternée des couleurs vaut zéro.



Cette règle dit que  $a - b + c - b = 0$ , ou encore  $a + c = 2b$ .

Si  $a = b$ , alors  $c = b$  : c'est donc un croisement unicolore.

Si  $a \neq b$ , alors  $c$  est la troisième couleur (croisement tricolore).

Les croisements bicouleurs sont exclus, comme souhaité.

### Proposition

*Pour tout diagramme d'un nœud il existe autant de tricoloriages commençant par bleu que par n'importe quelle autre couleur.*

**Démonstration.** On translate toutes les couleurs en ajoutant une constante  $t$ . La règle est respectée, car  $a + c = 2b$  devient  $(a + t) + (c + t) = 2(b + t)$ . La couleur initiale est traduite de 0 à  $t$ . On peut tout défaire en traduisant par  $-t$ . Ceci établit la bijection souhaitée, d'où le résultat énoncé.  $\square$

**Application.** Prouver ainsi que  $\text{col}(A * B) = \text{col}(A) \cdot \text{col}(B)$ .

## Complément : une coïncidence remarquable

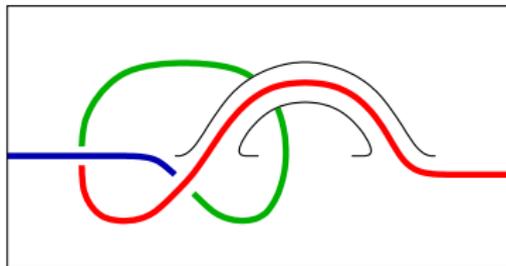
Après avoir colorié un grand nombre de diagrammes de nœuds ouverts (accrochés aux murs à gauche et à droite), on remarque une coïncidence :

### Observation empirique

Pour tout tricoloriage les couleurs initiale et terminale coïncident.

Ce phénomène est étroitement lié à la topologie du plan : notre observation empirique ne tient plus quand nous colorions des diagrammes dessinés sur des surfaces plus générales.

Voici un exemple simple, à titre d'illustration et d'avertissement :



Ici l'arc rouge traverse l'arc vert par une anse, évitant tout croisement. Ainsi les couleurs initiale (bleu) et terminale (rouge) peuvent différer.

Si nous voulons tenter une preuve de notre observation empirique il faudra donc utiliser des propriétés des diagrammes spécifiques au plan.

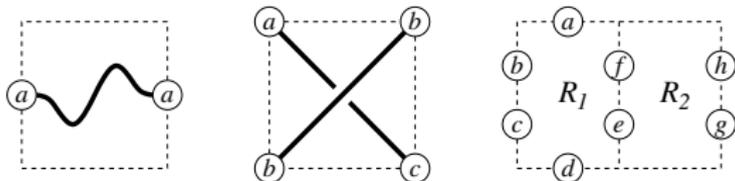
# Complément : démonstration de la coïncidence remarquable

## Théorème

Soit  $D$  un diagramme tricolorié. Pour tout rectangle  $R$  qui intersecte  $D$  transversalement au bord la somme alternée des couleurs au bord est zéro.

**Démonstration.** L'énoncé est vrai dans les trois cas élémentaires :

- 1 Si  $R$  ne contient aucune partie du diagramme.
- 2 Si  $R$  ne contient qu'un seul brin sans aucun croisement.
- 3 Si  $R$  ne contient que deux brins avec exactement un croisement.



Étant donné un grand rectangle  $R$ , on peut le découper (verticalement ou horizontalement) en deux petits rectangles  $R_1$  et  $R_2$  comme ci-dessus. Si l'énoncé est vrai et pour  $R_1$  et pour  $R_2$ , alors il est aussi vrai pour  $R$  : en ajoutant les sommes alternées les couleurs intérieures s'annulent. (Dans l'exemple on ajoute  $a - b + c - d + e - f = 0$  et  $f - e + g - h = 0$ .) En subdivisant assez finement, on se ramène aux cas élémentaires.  $\square$

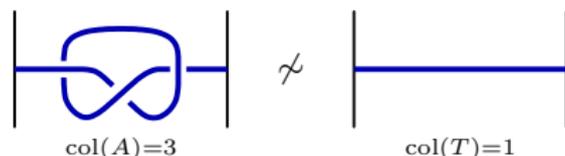
**Application.** On peut appliquer le théorème à un rectangle qui n'intersecte le diagramme qu'en deux points, l'entrée à gauche et la sortie à droite. Ainsi pour tout tricoloriage les couleurs initiale et terminale coïncident.

## Existe-t-il des nœuds inverses ?

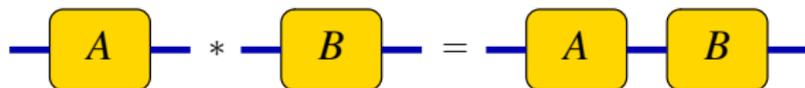
Le nœud de trèfle admet trois tricoloriages :



On en déduit que le nœud de trèfle est non trivial :



Mieux encore : on a  $\text{col}(A * B) = \text{col}(A) \cdot \text{col}(B)$ .



Si l'on avait  $A * B = 1$ , alors  $\text{col}(A) \cdot \text{col}(B) = 1$ . C'est impossible !

### Conclusion

Le nœud de trèfle n'a pas d'inverse.

Ceci résout notre question initiale issue du « jonglage topologique ».

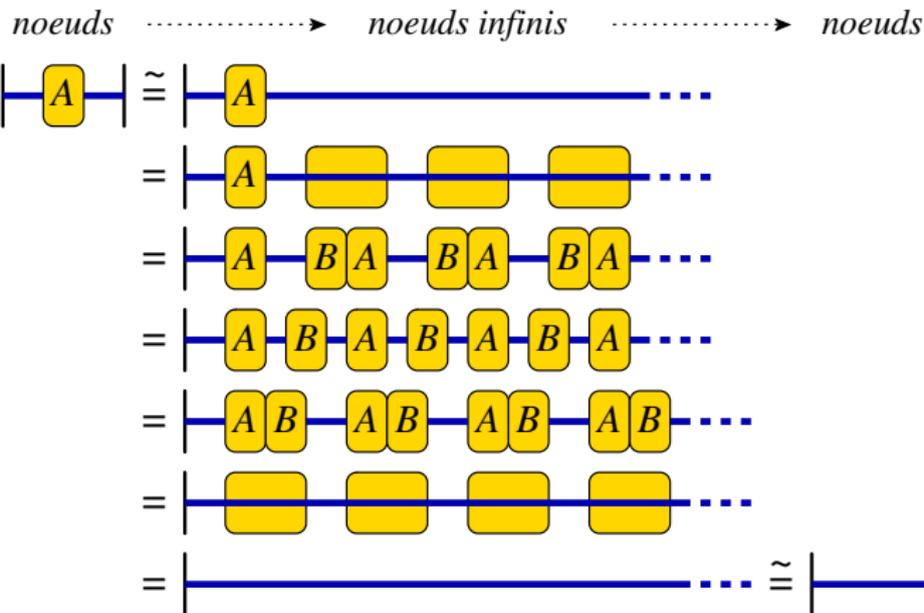
## Complément : l'astuce de Barry Mazur

Existe-t-il des nœuds inverses ? Voici la réponse en toute généralité :

### Théorème

Si deux nœuds  $A$  et  $B$  vérifient  $A * B = 1$ , alors  $A = B = 1$ .

**Démonstration** (d'après Barry Mazur 1962)      On sait que  $BA = AB = 1$ .



## Complément : l'astuce de Mazur est-ce une escroquerie ?

L'argument ci-dessus a aussi été nommé « escroquerie de Mazur ».

L'astuce de Mazur peut être transformée en une preuve solide, mais il faut donner un sens précis aux constructions utilisées.

Soyons donc prudents !

Voici une analogie numérique instructive, qui est visiblement absurde :

$$\begin{aligned} & 1 \\ = & 1 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ = & 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \\ = & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ = & (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\ = & 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ = & 0 \end{aligned}$$

Mais où est l'erreur ?

## Complément : décomposition en nœuds premiers

Un nœud  $A$  est *composé* si  $A = B * C$  où  $B \neq 1$  et  $C \neq 1$ .

Un nœud  $A$  est *premier* si  $A = B * C$  entraîne soit  $B = 1$  soit  $C = 1$ .

Par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit sont premiers.

Il existe une infinité de nœuds premiers.

### Théorème (Schubert 1949)

*Tout nœud se décompose comme concaténation de nœuds premiers.*

*Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.* □

Ceci justifie que la tabulation ne tient compte que des nœuds premiers.

Les nombres naturels  $(\mathbb{N}, \cdot)$  jouissent de la même propriété :

tout  $n \in \mathbb{N}$  se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers.

### Corollaire

*Il existe une bijection entre les nœuds avec leur concaténation*

*et les nombres naturels  $\{1, 2, 3, \dots\}$  avec leur multiplication.* □

Sous cette bijection le nœud trivial correspond au nombre 1,  
les nœuds premiers correspondent aux nombres premiers,  
et les nœuds composés correspondent aux nombres composés.

Autrement dit, les nœuds se comportent comme les nombres naturels.  
Malheureusement le théorème ne fournit pas de bijection explicite.

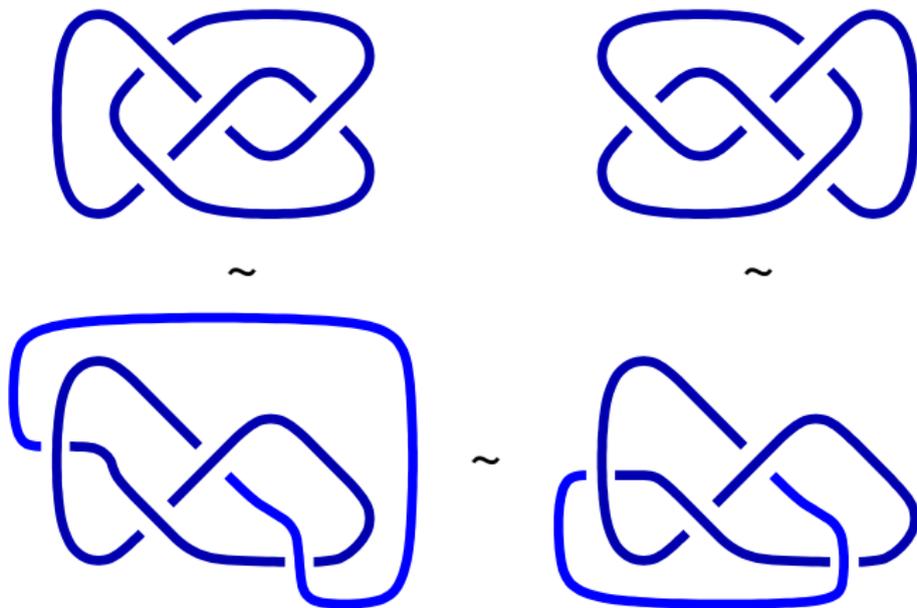
# La question de la chiralité

## Proposition

*Le nœud de huit est amphichiral.*

## Démonstration.

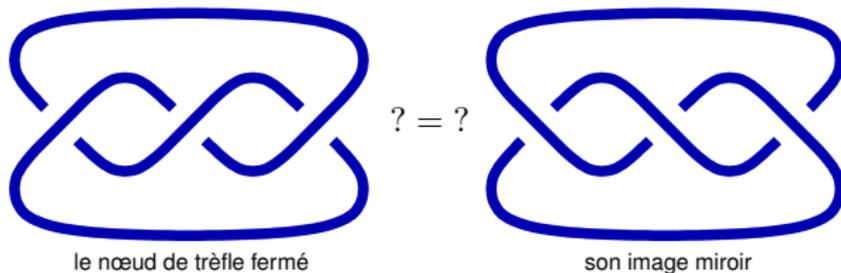
Il suffit d'exhiber une transformation qui fait ce que l'on veut :



## Le nœud de trèfle, est-il chiral ?

Question (Listing 1847, résolue par Dehn 1914)

Le nœud de trèfle est-il égal à son image miroir ?



Nos expériences (plus ou moins étendues) nous mènent à soupçonner que ce n'est pas possible pour le nœud de trèfle.

Dans la suite on essaiera de construire des invariants, dans l'espoir de répondre définitivement à cette question.

Par commodité on travaillera avec des diagrammes fermés comme dans les dessins ci-dessus.

## Des nœuds aux entrelacs

Quand on autorise plusieurs composantes, on parle d'un *entrelacs*.



diagramme d'un entrelacs



diagramme orienté

Muni d'une orientation sur chaque composante, c'est un *entrelacs orienté*.  
Le théorème de Reidemeister s'étend aux diagrammes d'entrelacs orientés.

On peut définir la vrille  $v: \vec{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{Z}$  en comptant les croisements avec signes :

$$v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nwarrow \\ \nearrow \end{array}\right) = +1, \quad v\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nwarrow \end{array}\right) = -1.$$

La vrille n'est pas invariante — elle change sous un mouvement R1 :

$$v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) + 1.$$

Par contre, on a toujours l'invariance par R2 et R3 :

$$v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}\right), \quad v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}\right).$$



## Complément : le nombre d'enlacement est invariant

### Proposition

*Le nombre d'enlacement  $\text{lk}(D)$  est invariant.*

**Démonstration.** Le mouvement R1 ne pose plus de problème :

$$\text{lk}\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = \text{lk}\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}\right).$$

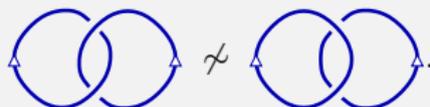
Puis on assure toujours l'invariance par les mouvements R2 et R3 :

$$\text{lk}\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = \text{lk}\left(\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}\right), \quad \text{lk}\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = \text{lk}\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right).$$

Pour ceci il suffit de vérifier tous les cas possibles. □

### Corollaire

*On ne peut pas séparer les composantes d'un entrelacs de Hopf :*



J'utilise ce résultat quotidiennement pour l'antivol de mon vélo.

## Complément : tresses fermées

Toute tresse  $\beta$  peut être fermée :



### Théorème (Alexander 1924)

*Tout entrelacs peut être représentée comme la fermeture d'une tresse.*  $\square$

Si une tresse  $\beta \in \mathbf{B}_n$  représente ainsi l'entrelacs  $L$ , alors les deux *mouvements de Markov* suivants créent d'autres tresses  $\beta'$  représentant  $L$  :

Stabilisation :  $\beta' = \beta s_n^{\pm 1} \in \mathbf{B}_{n+1}$  où  $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{B}_{n+1}$  en rajoutant un brin trivial.

Conjugaison :  $\beta' = \alpha \beta \alpha^{-1} \in \mathbf{B}_n$  pour n'importe quelle tresse  $\alpha \in \mathbf{B}_n$ .

Ces mouvements correspondant aux mouvements de Reidemeister R1 et R2.

### Théorème (Markov 1945)

*Deux tresses représentent le même entrelacs si et seulement si elles sont reliées par une suite finie de mouvements de Markov.*

Cette correspondance permet d'étudier les entrelacs à l'aide des tresses, la théorie des groupes, les représentations par des matrices, etc. Depuis Jones 1984 c'est un domaine de recherche très actif.

## Le crochet de Kauffman (1987)

Objectif : On veut associer à chaque diagramme  $D$  un nombre  $\langle D \rangle$ .

Bien sûr on espère trouver finalement un *invariant*.

La construction suivante est astucieuse mais élémentaire.

Commençons par un diagramme sans croisements : c'est une réunion de courbes fermées simples dans le plan, éventuellement imbriqués. On pose

$$\langle \bigcirc \rangle := C, \quad \langle \bigcirc \bigcirc \rangle := C^2, \quad \langle \bigcirc \bigcirc \bigcirc \rangle := C^3, \dots, \langle \bigcirc^n \rangle := C^n.$$

Passons ensuite aux diagrammes avec croisements.

Tout croisement peut être éliminé de deux manières différentes :

$$\times \rightarrow \rangle \langle \text{ ou } \times.$$

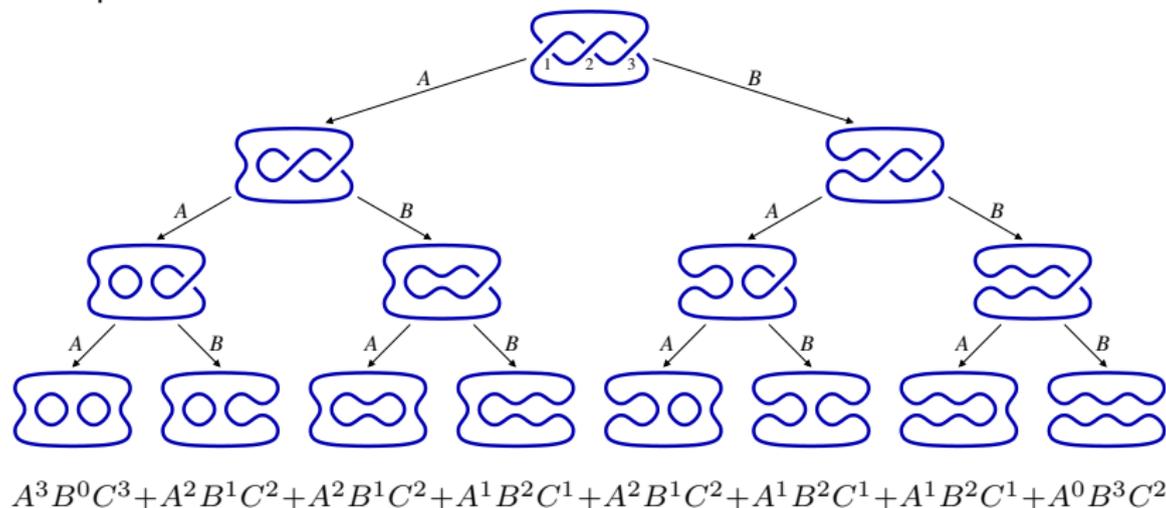
Essayons de définir  $\langle D \rangle$  par une récurrence à deux termes :

$$\langle \times \rangle := A \langle \rangle \langle \rangle + B \langle \times \rangle.$$

Ce sont des *relations locales*. Ici  $A, B, C$  sont des indéterminées.

# Calcul récursif du crochet : un exemple

Exemple :



## Notation

Notons  $\mathcal{D}$  l'ensemble des diagrammes planaires d'entrelacs non orientés.  
Nos formules définissent une application  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A, B, C]$ , notée  $D \mapsto \langle D \rangle$ .

## Invariance : l'ordre des croisements

L'ordre des croisements n'influe pas le résultat :

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \right\rangle &= A \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \right\rangle + B \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \right\rangle \\ &= AA \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \right\rangle + AB \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \right\rangle + BA \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \right\rangle + BB \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

Dans l'autre ordre on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right\rangle &= A \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right\rangle + B \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right\rangle \\ &= AA \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right\rangle + AB \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right\rangle + BA \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right\rangle + BB \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

La commutativité  $AB = BA$  assure l'égalité des deux résultats.

Question : Est-ce que  $\langle D \rangle$  est invariant par mouvements de Reidemeister ?

## Invariance : R2

Regardons d'abord le mouvement R2 :

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle \stackrel{?}{=} \langle \text{Diagram 2} \rangle$$

Par définition du crochet on trouve

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &= AA \langle \text{Diagram 3} \rangle + AB \langle \text{Diagram 4} \rangle + BA \langle \text{Diagram 5} \rangle + BB \langle \text{Diagram 6} \rangle \\ &= (AA + BB + ABC) \langle \text{Diagram 7} \rangle + BA \langle \text{Diagram 8} \rangle. \end{aligned}$$

On obtient l'invariance pour  $AB = 1$  et  $A^2 + B^2 + ABC = 0$ .

Autrement dit, on impose les relations  $B = A^{-1}$  et  $C = -A^2 - A^{-2}$ .

Ainsi on n'a plus trois indéterminées  $A, B, C$  mais une seule,  $A$ .

## Invariance : R3

Regardons ensuite le mouvement R3 :

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle \stackrel{?}{=} \langle \text{Diagram 2} \rangle$$


Par définition du crochet on trouve d'un coté

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = A \langle \text{Diagram 3} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 4} \rangle,$$


et de l'autre coté

$$\langle \text{Diagram 2} \rangle = A \langle \text{Diagram 5} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 6} \rangle.$$


Les deux sont égaux ! (On profite ici de l'invariance R2.)

## Invariance : R1

Regardons finalement le mouvement R1 :

$$\langle \text{diagram} \rangle \stackrel{?}{=} \langle \text{diagram} \rangle$$

Par définition du crochet on trouve

$$\begin{aligned} \langle \text{diagram} \rangle &= A \langle \text{diagram} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagram} \rangle \\ &= [A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}] \langle \text{diagram} \rangle = -A^3 \langle \text{diagram} \rangle. \end{aligned}$$

De même on trouve

$$\begin{aligned} \langle \text{diagram} \rangle &= A^{-1} \langle \text{diagram} \rangle + A \langle \text{diagram} \rangle \\ &= [A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + A] \langle \text{diagram} \rangle = -A^{-3} \langle \text{diagram} \rangle. \end{aligned}$$

On obtient l'invariance gratuitement pour  $A = e^{i\pi/3}$ , racine 6ème de l'unité.  
Mais c'est inutilement restrictif ! On verra une meilleure solution...

## Du crochet de Kauffman au polynôme de Jones

### Proposition

À tout diagramme non orienté  $D$  on peut associer une valeur  $\langle D \rangle$  définie par

$$\langle \bigcirc^n \rangle = (-A^2 - A^{-2})^n \quad \text{et} \quad \langle \times \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle.$$

Elle est invariante par des mouvements de Reidemeister R2 et R3 :

$$\langle \text{R2} \rangle = \langle \text{R2} \rangle, \quad \langle \text{R3} \rangle = \langle \text{R3} \rangle.$$

Sous un mouvement R1 elle change de manière bien contrôlée :

$$\langle \text{R1} \rangle = -A^3 \langle \rangle, \quad \langle \text{R1} \rangle = -A^{-3} \langle \rangle.$$

Pour corriger ce défaut on utilise la vrille de diagrammes orientés :

$$v(\text{R1}) = v(\text{R1}) + 1, \quad v(\text{R1}) = v(\text{R1}) - 1.$$

### Théorème

À tout diagramme orienté  $D$  on associe  $J(D) := (-A^3)^{-v(D)} \cdot \langle D \rangle$ .

Ce polynôme est invariant par les trois mouvements de Reidemeister.  $\square$

C'est donc une propriété de l'entrelacs indépendante du diagramme choisi.

## Application au nœud de trèfle

Considérons un diagramme  $D$  du nœud de trèfle et son image miroir  $D^*$  :



On voit que la vrille de ces diagrammes vaut  $v(D) = -3$  et  $v(D^*) = +3$ .

D'après nos calculs nous avons  $\langle D \rangle = A^{-7} + A^{-3} + A^1 - A^9$ .

Ainsi  $J(D) = (-A^3)^{-v(D)} \langle D \rangle = -A^2 - A^6 - A^{10} + A^{18}$ .

Pour l'image miroir nous obtenons  $\langle D^* \rangle = A^7 + A^3 + A^{-1} - A^{-9}$ .

et ainsi  $J(D^*) = (-A^3)^{-v(D^*)} \langle D^* \rangle = -A^{-2} - A^{-6} - A^{-10} + A^{-18}$ .

### Conclusion

On vient de prouver que  $D \not\sim D^*$  : le nœud de trèfle est chiral !

## Complément : Polynôme de Jones et images miroirs

Pour un diagramme  $D$  on note  $D^*$  son image miroir, obtenue en renversant tous les croisements. Ainsi la vrille satisfait  $v(D^*) = -v(D)$ .

Pour un polynôme  $P \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$  on note  $P^*$  le polynôme miroir, obtenu en remplaçant  $A \mapsto A^{-1}$ . Par exemple,  $(5A^2 + 4A^{-3})^* = (5A^{-2} + 4A^3)$ .

### Proposition (image miroir)

*Le crochet de Kauffman vérifie  $\langle D^* \rangle = \langle D \rangle^*$ .*

**Démonstration.** Par récurrence sur le nombre des croisements.

S'il n'y a aucun croisement, alors  $D = \bigcirc^n$  et  $\langle D \rangle = C^n$ .

On voit que  $D^* = D$  ainsi que  $C^* = (-A^2 - A^{-2})^* = C$ .

S'il y a au moins un croisement, alors on applique la relation locale :

$$\begin{aligned}\langle D \times \rangle &= A^{+1} \langle D_1 \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle D_2 \times \rangle \\ \langle D^* \times \rangle &= A^{-1} \langle D_1^* \rangle \langle \rangle + A^{+1} \langle D_2^* \times \rangle\end{aligned}$$

### Corollaire

*Le polynôme de Jones vérifie  $J(D^*) = J(D)^*$ . Autrement dit :*

*Le polynôme du diagramme miroir et le polynôme miroir du diagramme.* □

## Conclusion

La théorie mathématique des tresses et des nœuds est relativement récente. Depuis ses débuts au 19e siècle, elle a vu un développement surprenant tout le long le 20e siècle, et elle a explosé durant les 25 dernières années.

Nous n'avons vu que la pointe de l'iceberg :

- Le groupe des tresses,
- La notion de tricoloriage,
- Le polynôme de Jones.

Il y a encore beaucoup de questions ouvertes, par exemple :

Question de Jones : Si  $J(K) = J(\bigcirc)$ , est-ce que nécessairement  $K = \bigcirc$  ?  
Autrement dit, le polynôme de Jones reconnaît-il le nœud trivial ?

Je vous remercie de votre attention !

[www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/popularisation/#noeuds](http://www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/popularisation/#noeuds)