12. Übungsblatt zu Mathematik 2 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

SoSe 2022

Aufgabe 1. (V) Für jede der folgenden symmetrischen Matrizen $A \in M_n(\mathbb{R})$ untersuchen Sie, ob die zugehörige quadratische Form $Q_A(x)$ (siehe Definition 37.7) positiv-definit, negativ-definit oder indefinit ist; falls $Q_A(x)$ indefinit ist, so geben Sie $x, y \in \mathbb{R}^n$ an mit $Q_A(x) > 0$ und $Q_A(y) < 0$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, **(b)** $A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, **(c)** $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 2. (V) Gegeben sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + 2x^3$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen die kritischen Punkte von f und untersuchen Sie, ob jeweils ein lolakes Extremum vorliegt.

Aufgabe 3. (V) Gegeben sei $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = \exp(x+y+z)(xy+2z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. Finden Sie die kritischen Punkte von f und untersuchen Sie, ob dort lokale Extrema vorliegen.

Aufgabe 4. (V) Es soll ein (senkrechtes) zylinderförmiges Gefäß mit Grundfläche, aber ohne Deckel hergestellt werden. Ist $r > 0$ der Radius der Grundfläche des Zylinders und $h > 0$ die Höhe, so sind also Volumen $V(r, h)$ und Oberfläche $O(r, h)$ des Gefäßes gegeben durch:

$$V(r, h) = \pi r^2 h \qquad \text{und} \qquad O(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r h.$$

Wie müssen r und h gewählt werden, damit $V(r, h) = \pi$ gilt und die Oberfläche möglichst klein sein soll?

Aufgabe 5. (**S**, 14=4+3+3+4 Punkte) Sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := y \cdot (x^2 + (y-1)^2)$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f und finden Sie die kritischen Punkte von f, d.h., alle $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\nabla f(a, b) = [0\ 0]$.

(b) Bestimmen Sie die Hesse–Matrix $H_f(a, b)$ für alle kritischen Punkte (a, b) von f.

(c) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f auf $D^\circ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

(d) Bestimmen Sie die relativen lokalen Extrema von f auf $D' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. (Gehen Sie dabei analog zu Beispiel 37.14 vor.)

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In den Übungsgruppen am 18. und 19. Juli.