

10. Übungsblatt zu Mathematik 2 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

SoSe 2022

Aufgabe 1. (V) Sei $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq 1, \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass f integrierbar ist. Geben Sie genau an, welche Sätze und Aussagen der Vorlesung Sie dazu benutzen.

(b) Bestimmen Sie das Integral $\int_0^2 f(x)dx$. Warum ist das Ergebnis kein Widerspruch zu Folgerung 34.13 (“Positive Definitheit”)?

Aufgabe 2. (V)

(a) Sei $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{1}{1+x^{1/3}}$. Berechnen Sie das Integral $\int_1^2 f(x)dx$ mit Hilfe der Substitution $x = t^3$.

(b) Sei $f(x) := \arctan(x)$ für $x \geq 0$. Benutzen Sie partielle Integration (mit $u(x) = \arctan(x)$ und $v(x) = x$) und dann die Substitutionsregel, um das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ zu berechnen. Können Sie eine Stammfunktion von f finden?

(c) Finden Sie eine Stammfunktion von $f(x) := \sqrt{1+x^2}$.

(Sie können gerne Sage oder ein anderes Programm benutzen, wenn Sie nicht weiterkommen; aber Sie sollten danach trotzdem einen Lösungsweg angeben, der zeigt, wie man zu der Formel kommt, die Ihnen das Programm ausgegeben hat.)

Aufgabe 3. (V)

(a) Sei $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1}$. Skizzieren den Graphen von f . Berechnen Sie die Bogenlänge des Graphs von f auf dem Intervall $[1, 2]$.

(b) Sei $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) := x^{3/2}$. Berechnen Sie die Bogenlänge des Graphs der Funktion g auf dem Intervall $[0, 4]$.

Aufgabe 4. (V) Sei $s \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^s$.

(a) Für welche $s \in \mathbb{R}$ existiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^s dx$?

(b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ existiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^s dx$?

Falls das uneigentliche Integral existiert, so bestimmen Sie jeweils dessen Wert.

Aufgabe 5. (S, 12=3+3+3+3 Punkte) Sei $f: \mathbb{R}_{>-1} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$.

- (a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f . Welche Methode benutzen Sie?
 (b) Die Funktion f ist für $x = -1$ nicht definiert. Existiert das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 f(x)dx$?
 (c) Bestimmen Sie die Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ für alle $x > -1$.
 (d) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_{2,1}f(x)$ sowie die Lagrange-Form des Restterms $R_{2,1}f(x)$ (siehe Satz 35.12).

Aufgabe 6. (Z) Bestimmen Sie Stammfunktionen für die folgenden Funktionen:

$$x \cdot \sin(x), \quad x^2 \cdot \cos(x), \quad x^3 \cdot \exp(x), \quad x \cdot \log(x), \quad \tan(x), \quad \sin(x) \cdot \exp(2x),$$

$$\frac{1}{1+x^4}, \quad \frac{1}{(1+x^2)^2}, \quad \sin(x)^3, \quad \tan(x)^2, \quad \frac{x^2 \cdot \exp(-\sqrt{x^3-1})}{\sqrt{x^3-1}}, \quad \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}.$$

(Sie können natürlich wiederum gerne Sage oder ein anderes Programm benutzen, wenn Sie nicht weiterkommen; aber Sie sollten sich trotzdem einen Lösungsweg überlegen, wie man zu der von einem Programm ausgegebenen Formel kommt.)

Schriftliche Aufgaben sind mit (S) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In den Übungsgruppen am 4. und 5.Juli.