

## 9. Übungsblatt zu Mathematik 2 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

SoSe 2022

**Aufgabe 1.** (V) Bestimmen Sie alle Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) := \left(\frac{1}{3}x - 1\right)^5 \\ \text{(b)} & f(x) := \sin(x) - \frac{2}{\sqrt{x}} \\ \text{(c)} & f(x) := \frac{x^4 - 2}{x^2} \\ \text{(d)} & f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

**Aufgabe 2.** (V) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int_{-1}^2 x^3 dx \quad \text{(b)} \int_0^\pi \sin(2x) dx \quad \text{(c)} \int_0^{12} \sqrt{\frac{2}{3}x + 1} dx \quad \text{(d)} \int_{-6}^1 \frac{1}{(\sqrt[3]{2-x})^2}$$

**Aufgabe 3.** (S, 12=3+3+3+3 Punkte) Bestimmen Sie jeweils die Partialbruchzerlegung sowie eine Stammfunktion der folgenden rationalen Funktionen:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) := \frac{x^5}{x^2 - 1} \\ \text{(b)} & f(x) := \frac{x + 4}{x^2 - x - 2} \\ \text{(c)} & f(x) := \frac{x^3 - 8x^2 + 13x + 17}{x^2 - 9x + 20} \\ \text{(d)} & f(x) := \frac{x^4 + x^3 + x}{x^3 + 1} \end{array}$$

**Aufgabe 4.** (V) Gegeben sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Es sei  $f$  zweimal stetig differenzierbar, d.h., es existiert die Ableitung  $f'$ , diese ist wiederum differenzierbar (und wird mit  $f''$  bezeichnet), und  $f''$  ist stetig. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $h := (b - a)/n$ . Dann gilt die sogenannte **Trapezregel**:

$$\int_a^b f(x) dx = h \left( \frac{1}{2} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + \frac{1}{2} f(b) \right) + R_n \quad \text{mit} \quad |R_n| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \sup\{|f''(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

(Für einen Beweis siehe zum Beispiel das Corollar zu Satz 7 in §19 im 1. Band des Buches von Forster.) Die obige Formel kann benutzt werden, um Integrale näherungsweise zu berechnen.

Sei nun  $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$  für  $x \in [0, 1]$ . Nach Beispiel 34.10 der Vorlesung ist  $I := \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ .

(a) Schätzen Sie  $|R_n|$  für  $n = 1, 2, 3$  gemäß obiger Ungleichung ab.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der obigen Trapezregel für  $n = 3$  eine Approximation von  $I$ .

**Aufgabe 5.** (V) Betrachte noch einmal die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

in Beispiel 29.2(b); dort wurde gezeigt, dass diese den Konvergenzradius  $R_0 = 1$  hat. Benutzen Sie Bemerkung 33.12 (und Beispiel 29.2(a)), um zu zeigen:

$$f(x) = -\log(1-x) \quad \text{für } |x| < 1.$$

**Aufgabe 6.** (Z) Beweisen Sie die Aussagen in Beispiel 33.4 der Vorlesung. Also konkret: Seien  $f_d, g_d, F_d, G_d$  wie in Beispiel 33.4 definiert. Zeigen Sie, dass  $F'_d = f_d$  und  $G'_d = g_d$  für alle  $d \in \mathbb{N}$  gilt.

Schriftliche Aufgaben sind mit (S) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** In den Übungsgruppen am 27. und 28. Juni.