

## 7. Übungsblatt zu Mathematik 2 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

SoSe 2022

**Aufgabe 1.** (V) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{7x^2 - 3x + 12} \\ \text{(b)} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-2x^2 + \sin(x)} \\ \text{(c)} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 5 - x}{x + \sqrt{4 + 9x^2}} \\ \text{(d)} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(\sqrt{x^2 + 1} - x). \end{array}$$

**Aufgabe 2.** (V) Sei  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $0 \leq f(x) \leq 1$ .

(a) Zeigen Sie: Ist  $f$  stetig, so gibt es ein  $x_0 \in [0, 1]$  mit  $f(x_0) = x_0$ , d.h.,  $x_0$  ist ein Fixpunkt von  $f$ .

(Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion  $g(x) := f(x) - x$  an.)

(b) Finden Sie ein Beispiel, so dass  $f$  nicht stetig ist und keinen Fixpunkt hat. — In (a) kann man also nicht auf die Voraussetzung verzichten, dass  $f$  stetig ist.

**Aufgabe 3.** (V) Wie muss man jeweils  $a \in \mathbb{R}$  wählen, damit die Funktion  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig ist?

$$\text{(a)} \quad f(x) := \begin{cases} x + a & \text{falls } x \geq 0, \\ 3 \exp(x) & \text{falls } x < 0, \end{cases} \quad \text{(b)} \quad f(x) := \begin{cases} ax - 1 & \text{falls } x \leq 1, \\ \sqrt{x} + 1 & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Skizzieren Sie für diese  $a \in \mathbb{R}$  jeweils den Graphen von  $f$ .

**Aufgabe 4.** (V) Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

$$\text{(a)} \quad f(x) := \frac{\cos(x)}{x^2 + 1}, \quad \text{(b)} \quad f(x) := x \cdot \sin(x) \cdot \exp(x).$$

(Hinweis: Produkt- und Quotientenregel.)

**Aufgabe 5.** (S, 15=3+3+3+3+3 Punkte) Für  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &:= \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)), & \cosh(x) &:= \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)), \\ \tanh(x) &:= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}. \end{aligned}$$

Diese Funktionen heißen **Hyperbel-Funktionen**.

(a) Zeigen Sie, dass  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\tanh$  differenzierbar auf ganz  $\mathbb{R}$  sind; bestimmen Sie jeweils die Ableitungen. (Hinweis: Produkt- und Quotientenregel;  $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ .)

(b) Bestimmen Sie die Grenzwerte dieser Funktionen für  $x \rightarrow \pm\infty$ .

(c) Zeigen Sie  $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ ,  $\cosh(x) = \cosh(-x)$ ,  $\tanh(-x) = -\tanh(x)$  sowie  $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

- (d) Zeigen Sie  $\cosh(x) \geq 1$  und  $-1 < \tanh(x) < 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Gibt es auch Schranken für  $\sinh(x)$  ?
- (e) Skizzieren Sie die Graphen von  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\tanh$ .

**Aufgabe 6.** (Z) Wir definieren  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x) := \frac{1-x}{1+x}$  für  $x > 0$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $f$  differenzierbar ist und bestimmen Sie  $f'(x)$  für alle  $x > 0$ .
- (b) Zeigen Sie:  $-1 < f(x) < 1$  für alle  $x > 0$ , also  $f(\mathbb{R}_{>0}) \subseteq (-1, 1)$ .
- (c) Zeigen Sie, dass  $f$  eine Bijektion von  $\mathbb{R}_{>0}$  nach  $(-1, 1)$  ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

Schriftliche Aufgaben sind mit (S) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** In den Übungsgruppen am 13. und 14. Juni.