5. Übungsblatt zu Mathematik 2 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

SoSe 2022

Aufgabe 1. (V) Entscheiden Sie jeweils, ob die Reihe konvergiert. Bestimmen Sie in jedem Fall den Wert der Reihe.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2}{3^k}$ **(b)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^k - 5 \cdot 3^k}{6^k}$ **(c)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^{k+1}}{3^k}$ **(d)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$ **(e)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$

(f) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(a+1)^k}{3^k}$, mit $a \in \mathbb{R}$ (das Ergebnis hängt ab vom Wert von a)

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{10k}}$ **(h)** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{k+2}{2k+3}$.

Aufgabe 2. (V) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen und $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die zugehörige Potenzreihe. So wie für Reihen gibt es auch diverse Formeln für den Konvergenzradius einer solchen Potzenzreihe. Zum Beispiel gilt :

Ist $a_n \neq 0$ für alle n und existiert $q := \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| \in \mathbb{R}$ oder $q := \sqrt[n]{|a_n|}$, so ist der Konvergenzradius der Potenzreihe gegeben durch $R = 1/q$, wobei $R = \infty$ für $q = 0$.
(Siehe zum Beispiel Satz 4.15 und Satz 4.16 im Buch von Glosauer.)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^n+3^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+n^2} x^n.$$

Aufgabe 3. (**S**, 8=4+4 Punkte) Hier geht es um die Exponential-Funktion $\exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Sind $m, r \in \mathbb{N}$, so gilt $e^{m/r} = \exp(m/r)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (dies ist eine Erweiterung der Bemerkung nach Folgerung 29.8).

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Nach Beispiel 29.6 gilt $|\exp(x) - E_m(x)| \leq 2|x|^{m+1}/(m+1)!$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq 2|x| - 2$. Nach (a) ist $\sqrt{e} = \exp(1/2)$. Wie groß muss man m mindestens wählen, um $\sqrt{e}$ bis auf 8 Dezimalstellen genau durch $E_m(1/2)$ anzunähern ?

Aufgabe 4. (V) Erinnern Sie sich an die Definition der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $0 \leq k \leq n$. Für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir nun

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},$$

(wobei $\binom{\alpha}{0} = 1$ und $\binom{0}{k} = 0$ für alle $\alpha \neq 0$ und alle k).

(a) Berechnen Sie $\binom{\alpha}{k}$ für $\alpha = 1, -1$ und $1/2$, wobei jeweils $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(b) Sei $\alpha \neq 0$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$.

Aufgabe 5. (Z) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_n = b_n := \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Bilden Sie $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ wie in Satz 28.13 über das Cauchy-Produkt von Reihen. Untersuchen Sie, ob auch hier gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big).$$

(*Hinweis :* Zeigen und benutzen Sie, dass $(k+1)(n-k+1) \leq (n+2)^2/4$ ist; schließen Sie daraus, dass $|c_n| \geq 2(n+1)/(n+2)$ gilt.)

Wie interpretieren Sie das Ergebnis Ihrer Untersuchung ?

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben : In den Übungsgruppen am 23. und 24. Mai.