4. Übungsblatt zu Mathematik 2 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

SoSe 2022

Aufgabe 1. (V) Bestimmen Sie die Werte der folgenden unendlichen Reihen (falls sie konvergieren):

(a) $5 - \frac{5}{2} + \frac{5}{4} - \frac{5}{8} + \frac{5}{16} \pm \ldots$ **(b)** $-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18} + \frac{1}{54} - \frac{1}{162} \pm \ldots$

(c) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$ **(d)** $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots.$

Aufgabe 2. (V) In der Vorlesung wurde das Majoranten-Kriterium, das Leibniz-Kriterium und das Quotienten-Kriterium vorgestellt. Es gibt auch noch das folgende **Wurzel-Kriterium**:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge. Es gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ sowie ein $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < c < 1$ und $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c$ für alle $n \geq n_0$. Dann konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

(Für einen Beweis siehe zum Beispiel Satz 4.13 im Buch von Glosauer.) Beweisen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen (versuchen Sie jeweils mehrere der genannten Kriterien):

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + 4}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k + 3^k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2 + (-1)^k)^k}{4^k}$ **(f)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c^k$ (mit $c \in \mathbb{R}$, $|c| < 1$, fest).

Aufgabe 3. (V) Richtig oder falsch ? (Kurze Begründung oder Gegenbeispiel.)

(a) Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Null-Folge, so konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
(b) Eine absolut konvergente Reihe ist immer auch konvergent.
(c) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so ist die Folge $(a_k)_{k\in N_0}$ nach oben und unten beschränkt.
(d) Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit $b_k \leq a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent.
(e) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent mit $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so ist $\big(a_{k+1}/a_k\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Null-Folge.

Aufgabe 4. (**S**, 9=3+6 Punkte)

(a) Untersuchen Sie, ob die unendliche Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konvergent bzw. absolut konvergent ist.
(Geben Sie genau an, welche Regeln oder Sätze der Vorlesung Sie benutzen.)

(b) Sei $a_k = \dfrac{1}{k^2}$ für $k \in \mathbb{N}$; für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ die zugehörige Partialsumme.

Zeigen Sie: $A_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Schließen Sie, dass die unendliche Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, mit Grenzwert ≤ 2.

(Geben Sie wieder genau an, welche Regeln oder Sätze der Vorlesung Sie benutzen.) — Wie in der Vorlesung bemerkt, ist es nicht ganz einfach, den genauen Grenzwert zu bestimmen; dieser ist $\pi^2/6 < 2$, wie Euler 1735 zeigte.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In den Übungsgruppen am 16. und 17 Mai.