3. Übungsblatt zu Mathematik 2 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

SoSe 2022

Aufgabe 1. (V) Geben Sie jeweils ein Bildungsgesetz für die folgenden Folgen an:

(a) $2, 4, 8, 16, 32, \ldots;$ **(b)** $-3, 3, -3, 3, -3, \ldots;$ **(c)** $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{36}, \ldots;$

(d) $3, 6, 12, 24, 48, \ldots;$ **(e)** $-2, 4, -6, 8, -10, 12, \ldots;$ **(f)** $1, 5, 13, 29, 61, 125, \ldots;$

(g) $0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, \ldots.$

Aufgabe 2. (V) Richtig oder falsch?

(a) Eine streng monoton wachsende Folge ist immer divergent.
(b) Eine divergente Folge ist immer unbeschränkt.
(c) Eine unbeschränkte Folge ist immer divergent.
(d) Eine beschränkte Folge ist immer konvergent.
(e) Eine beschränkte, streng monotone Folge ist immer konvergent.
(f) Eine konvergente Folge ist immer beschränkt.

Aufgabe 3. (V) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren) :

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-2n^3 + 6n^2 + (-1)^n}{5 + n^2 - 8n^3}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + n^9}{7n^{10} + 6n^3 - 1}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(2n+3)(-5n+8)}{n^2 + 1}.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n + 1}{2n - 1}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n), \quad \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n}), \quad \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n + 5\sqrt{n}} - \sqrt{n+2}).$

Aufgabe 4. (**S**, 9=3+3+3 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren) :

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{2n\sqrt{n} + 1}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - 5n^4}{n^4 + 8n^3 - 2}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{1 - 3\sqrt{n}}.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + (-1)^n) \cdot \left(\dfrac{n+1}{n}\right), \quad \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n}\right), \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{3n - 1}.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\pi \cos(n\pi), \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n^3}.$

Aufgabe 5. (**S**, 12=3+3+3+3 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgenden Folgen Null-Folgen sind:

(a) $\left(\dfrac{c}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (wobei $p \in \mathbb{N}$); **(b)** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}};$ **(c)** $\left(\dfrac{\sin(cn)}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (wobei $c \in \mathbb{R}$).

(d) $\left(\dfrac{2^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (Hinweis: Zeigen und benutzen Sie, dass $n! \geq 3^{n-2}$ für $n \geq 2$ gilt.)

Bestimmen Sie auch jeweils, ob die Folge monoton (wachsend oder fallend) ist.

Aufgabe 6. (V) Die Folgen in dieser Aufgabe sind rekursiv definiert; schreiben Sie jeweils die ersten 4-6 Folgenglieder hin. Versuchen Sie, in Teilen (a)-(d), eine explizite Formel für a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ zu finden. Untersuchen Sie, ob die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert (falls er existiert).

(a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^n}$ **(b)** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$ **(c)** $a_1 = -2,\ a_{n+1} = \frac{na_n}{n+1}$
(d) $a_1 = 2,\ a_2 = -1, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ **(e)** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{5a_n}{3+a_n}$.

Aufgabe 7. (Z) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} := \sqrt{1+a_n} \qquad \text{für } n \geq 1.$$

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $0 < a_n \leq 2$ und $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$.
(Sie dürfen verwenden, dass die Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ für $x \geq 0$ streng monoton wachsend ist.)

(b) Nach dem Monotonie-Prinzip konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; bestimmen Sie den Grenzwert. Geben Sie genau an, welche Regeln Sie dabei benutzen.

(Ein ähnliches Beispiel mit einer rekursiven Definition wurde in der Vorlesung behandelt; siehe Aufgabe 6 unten.)

Aufgabe 8. (Z) Sei $r = 2$ und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv wie in Beispiel 27.10(b) definiert, also:

$$a_1 := 2 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big) \qquad \text{für } n \geq 1.$$

Dort wurde auch bereits bemerkt bzw. gezeigt, dass $a_n > 0$ und $a_n \geq \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(a) Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion): $0 \leq a_n^2 - 2 \leq \dfrac{1}{2^{2^n-3}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie: $0 \leq a_n - \sqrt{2} \leq \dfrac{1}{2^{2^n-2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (*Hinweis:* $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.)

(c) Schließen Sie aus (c), dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $\sqrt{2}$.

(d) Bis zu welchen $n \in \mathbb{N}$ müssen Sie gehen, damit a_n auf den ersten 6 Nachkommastellen mit $\sqrt{2}$ übereinstimmt? (Wobei $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887 24\ldots$)

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In den Übungsgruppen am 9. und 10. Mai.