2. Übungsblatt zu Mathematik 2 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

SoSe 2022

Aufgabe 1. (**S**, 12 Punkte) Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in M_3(\mathbb{R})$, so dass $T^{-1} \cdot A \cdot T$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2. (**S**, 4 Punkte) Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in M_n(\mathbb{R})$, die sowohl symmetrisch als auch nilpotent sind.

Aufgabe 3. (V) Was für eine geometrische Figur in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ wird durch die folgende Gleichung beschrieben: $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + 4y^2 + 10x - 6y - 20 = 0$?

Siehe zum Beispiel `https://de.wikipedia.org/wiki/Quadrik` für eine ausführliche Beschreibung der möglichen geometrischen Figuren;
oder auch `https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/` (folgen Sie hier den Links `Kurse`, dann `Lineare Algebra`, danach `Analytische Geometrie` und schließlich `Quadriken`.)

Aufgabe 4. (V) Bestimmen Sie Singulärwertzerlegungen für die folgenden Matrizen :

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$.

Aufgabe 5. (V) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m, n \geq 1$ beliebig.
Zeigen Sie: Ist $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A \cdot A^{\mathrm{tr}}$, so ist λ auch ein Eigenwert von $A^{\mathrm{tr}} \cdot A$.
Gilt dies auch, falls $\lambda = 0$ ein Eigenwert von $A \cdot A^{\mathrm{tr}}$ ist?

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In den Übungsgruppen am 2. und 3. Mai.