

1. Übungsblatt zu Mathematik 2 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

SoSe 2022

Aufgabe 1. (V) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$.

Testen Sie, ob A eine hermitesche, normale oder unitäre Matrix ist.

Aufgabe 2. (V) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, so dass $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ normal ist.

Aufgabe 3. (V) Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Zeigen Sie: Ist $A \neq A^{\text{tr}}$ und A normal (aufgefaßt als Matrix in $M_2(\mathbb{C})$), so gilt $a = d$ und $c = -b \neq 0$.

Aufgabe 4. (V) Für $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, und $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z|^2 + |w|^2 = 1$ setzen wir

$$U := \begin{bmatrix} w & z \\ -u(\theta)\bar{z} & u(\theta)\bar{w} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \quad \text{wobei} \quad u(\theta) := \cos(\theta) + \sin(\theta)i \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass U eine unitäre Matrix ist.

Aufgabe 5. (S, 12 Punkte) Gegeben sei $A = \begin{bmatrix} 1 & i & i & 1 \\ -i & 1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 3 & i \\ 1 & i & -i & 3 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$. Man sieht sofort, dass

$A = A^*$ gilt; also ist A hermitesch und damit auch eine normale Matrix. Nach dem Spektralsatz gibt es eine unitäre Matrix $U \in M_4(\mathbb{C})$ so dass $D := U^* \cdot A \cdot U$ eine Diagonalmatrix ist.

In Beispiel 23.11 wird ein solches U bereits angegeben. Führen Sie die dazu nötigen Details (mit dem Verfahren in Bemerkung 23.10) explizit aus.

Aufgabe 6. (S, 4 Punkte) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine normale Matrix. Zeigen Sie, dass A eine Quadratwurzel besitzt, es also eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{C})$ gibt mit $A = B^2$.

Schriftliche Aufgaben sind mit (S) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In den Übungsgruppen am 25. und 26. April.