8. Übungsblatt zu Mathematik 1 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2021/22

Aufgabe 1. (V) In dieser Aufgabe sind alle $A, B, C...$ Matrizen mit Einträgen in einem Körper K.

Wahr oder falsch, mit kürzer Begründung oder Gegenbeispiel :

(a) Wenn AB definiert ist, dann ist immer auch BA definiert.
(b) Für zwei quadratische Matrizen A und B ist immer $AB = BA$.
(c) Es ist niemals $AB = BA$.
(d) Jede quadratische Matrix ist invertierbar.
(e) Für eine quadratische Matrix A der Größe $n \times n$ gilt $A^2 + 3A = A \cdot (A + 3I_n)$.
(f) Für zwei quadratische Matrizen A und B gilt $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.

Aufgabe 2. (V) Gegeben sei die Matrix $A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 6}$.

(a) Bringen Sie A mittels Gauß-Algorithmus auf Stufenform.
(b) Ersetzen Sie jede Ziffer k in A durch $\bar{k} \in \mathbb{F}_2$ und fassen Sie damit A als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{F}_2$ auf. Bringen Sie dann $A \in \mathbb{F}_2^{5\times 6}$ mittels Gauß-Algorithmus auf Stufenform.

Notieren Sie dabei in jedem Schritt, welche elementare Zeilenumformung Sie verwendet haben.

(c) Bestimmen Sie jeweils in (a) und (b) die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit Matrix A.

Aufgabe 3. (**S**, 9=3+3+3 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme über dem jeweils angegebenen Körper:

(a) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + z = 7 \\ x - 2y = 7 \\ x + y + z = 4 \\ \qquad \text{über } \mathbb{Q}. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -x + 6y + 18z = -3 \\ 2x - 2y - 6z = 1 \\ -2x + 2y + 6z = 2 \\ \qquad \text{über } \mathbb{C}. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \bar{2}x + \bar{3}y + \bar{4}z = \bar{5} \\ x + \bar{2}y + z = \bar{3} \\ \qquad \text{über } \mathbb{F}_7. \end{cases}$

Aufgabe 4. (V) Sei K ein Körper und $\alpha, \beta \in K$ fest. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von α und β) die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme (in (b) und (c) ist $K = \mathbb{R}$) :

$$\text{(a)} \begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + \alpha y + 6z = 6 \\ -x + 3y + (\alpha - 3)z = 0 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + y + z = 6 \\ 5x - y + \alpha z = \beta \end{cases} .$$

Aufgabe 5. (Z) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(R)$ und $1 < m < n$. Ziehen wir in A nach den ersten m Zeilen und den ersten m Spalten jeweils einen Trennstrich, so können wir uns A als aufgebaut aus 4 kleineren Matrizen vorstellen:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array}\right] \quad \text{mit} \quad B \in M_m(R),\ C \in R^{m \times (n-m)},\ D \in R^{(n-m) \times m},\ E \in M_{n-m}(R).$$

(a) Zeigen Sie: Ist auch $A' \in M_n(R)$ nach obigem Schema in "Kästchen" aufgeteilt, mit analogen kleineren Matrizen B', C', D', E', so gilt

$$A \cdot A' = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} B' & C' \\ \hline D' & E' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} BB' + CD' & BC' + CE' \\ \hline DB' + ED' & DC' + EE' \end{array}\right],$$

d.h., man kann A und A' "kästchenweise" multiplizieren. Machen Sie sich dies explizit an einem Beispiel mit $n = 3$ und $m = 2$ klar.

(b) Sei $R = K$ ein Körper, $1 < m < n$ und

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right] \quad \text{mit} \quad B \in M_m(R),\ \ C \in R^{m \times (n-m)},\ D \in M_{n-m}(R).$$

Zeigen Sie: Sind B und D invertierbar, so ist auch A invertierbar. Bestimmen Sie A^{-1}.
(Hinweis: Betrachten Sie zuerst eine 2×2-Matrix $\begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \in M_2(K)$ mit $b, c, d \in K$ und $b, d \neq 0$.)

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Woche 13. - 17. Dezember in den Übungsgruppen.