# 7. Übungsblatt zu Mathematik 1 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2021/22

**Aufgabe 1.** (V) In dieser Aufgabe geht es um das Rechnen mit komplexen Zahlen.

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$ wie folgt gegeben:

$$1)\quad z = (1+i)^{-1}, \qquad 2)\quad z = \frac{1}{i} + \frac{3}{1+i}, \qquad 3)\quad z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i}, \qquad 4)\quad z = \Big(\frac{1+i}{1-i}\Big)^{201}.$$

Bestimmen Sie jeweils $a, b \in \mathbb{R}$ mit $z = a + bi$.

(b) Welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ erfüllen die Gleichung $|z+1| = |z-(1+2i)|$ ?

(c) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = i$. (Hinweis: Die Rechnungen werden einfacher, wenn Sie die Polardarstellung in Satz 11.5 benutzen.) Bestimmen Sie analog alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -1 + i\sqrt{3}$.

**Aufgabe 2.** (V) (a) Zeigen Sie das sogenannte Parallelogrammgesetz:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2 \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

(b) Geben Sie für $n = 2, 3, 4, 6, 8$ alle $n$-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ (siehe Beispiel 11.6) explizit in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an. Können Sie auch Formeln für $n = 5$ finden?

**Aufgabe 3.** (V) (a) Gegeben seien die folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 8 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte $A \cdot A$ und $A \cdot B$ wobei $A$, $B$ jeweils eine der obigen Matrizen ist.

(b) Gegeben sei $A = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Berechnen Sie $A^2$, $A^3$, $A^4$, $A^5$, ....

**Aufgabe 4.** (V) In dieser Aufgabe haben alle Matrizen Einträge im Ring $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, aber wir lassen der Einfachheit halber den Querstrich in $\bar{n}$ (für $n \in \mathbb{Z}$) einfach weg; es ist also $R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Berechnen Sie $A \cdot A$ und $B \cdot A$ für $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(wobei die Einträge in der Ergebnismatrix wieder in $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ seien).

(b) Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

**Aufgabe 5.** (**S**, 9=5+4 Punkte) (a) Seien $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ wie folgt gegeben : $z_1 = 5 - i,\ z_2 = 3 + 2i$. Finden Sie die folgenden komplexe Zahlen in der Form $a + bi$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{z_1}{z_2}, \qquad \frac{z_1^{39}}{z_2^{39}}, \qquad \frac{z_1^{39}}{z_2^{40}}.$$

(b) Sei $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ gilt für $1 \leq j < i \leq n$.

Zeigen Sie: Sind $A, B \in M_n(K)$ obere Dreiecksmatrizen, so ist auch das Produkt $C := A \cdot B$ eine obere Dreiecksmatrix. Schreiben wir $C = [c_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$, so gilt $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$ für $1 \leq i \leq n$.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** In der Woche 06. - 10. Dezember in den Übungsgruppen.