6. Übungsblatt zu Mathematik 1 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2021/22

Aufgabe 1. (V) Sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring mit der Unbestimmten X.

(a) Sei $K = \mathbb{F}_5$, $f = \bar{3}X^3 + \bar{2}X + \bar{4}$ und $g = \bar{2}X^2 + \bar{3}X + \bar{1}$. Berechnen Sie $f + g$, $f - g$ und $f \cdot g$.

(b) Sei $K = \mathbb{F}_7$, $p = \bar{3}X^3 + \bar{2}X + \bar{4}$ und $q = \bar{2}X^2 + \bar{3}X + \bar{1}$. Berechnen Sie $p + q$, $p - q$ und $p \cdot q$.

(c) Sei $f = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0 \in K[X]$ mit $n \geq 0$ und $a_n \neq 0$; also $\mathrm{Grad}(f) = n$. Setzen wir $h := a_n^{-1}f \in K[X]$, so ist auch $\mathrm{Grad}(h) = n$, aber nun h normiert, d.h., der Leitkoeffizient von h ist gleich 1. Auf diese Weise kann man also ein Polynom $\neq 0$ stets normieren.
Normieren Sie die folgenden Polynome in $\mathbb{R}[X]$:

i) $3X^2 + 9X - 1$ ii) $-X^3 + 2$ iii) $(3X - 5)^2$;

normieren Sie alle Polynome in Teil (a) und Teil (b).

Aufgabe 2. (**S**, 9=4+5 Punkte) (a) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgenden Gleichungen erfüllen :

i) $(5x-2)^2 = 4$, ii) $|x-5| = \frac{1}{4}$, iii) $x \neq 1$ und $\left|\dfrac{2x-5}{x-1}\right| = 4$, iv) $|2x-3|+|x+1| = 1$.

(b) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

i) $|2x - 3| \leq 1$, ii) $|2x - 3| \geq 1$, iii) $x \neq 0$ und $\left|5 - \dfrac{2}{x}\right| < 1$,
iv) $(x - 1)^2 < 4$, v) $x^2 - x - 2 \geq 0$.

Zeigen Sie zum Beispiel, dass $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung i) genau dann erfüllt, wenn $1 \leq x \leq 2$ gilt; die Lösungsmenge ist also das Intervall $[1, 2]$. Finden Sie analog die Lösungsmengen für ii)–v).

Aufgabe 3. (V) Skizzieren Sie folgende Teilmengen der Ebene $\mathbb{R}^2$:

(a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2(a) \mid y = 1 - (x + 1)^2\}$.

(b) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$.

(c) $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(d) $D := (A \setminus B) \cap C$ und $E := (A \setminus B) \cup C$.

Aufgabe 4. (V) (a) Gegeben sei die periodischen Dezimalentwicklungen $x = 2,\overline{1345}$ und $y = 5{,}13\overline{106} \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $x = \frac{m}{n}$.

(b) Bestimmen Sie die Dezimalentwicklung von $x = \frac{15}{7} \in \mathbb{Q}$ und $y = \frac{5}{28} \in \mathbb{Q}$.

(Sie können natürlich das Ergebnis mit dem Calculator Ihres Smartphones finden, aber zur Lösung dieser Aufgabe gehört die Herleitung des Ergebnisses.)

Aufgabe 5. (Z) Analog zu Beispiel 10.10 der Vorlesung (wo die Eulersche Zahl e betrachtet wurde) wollen wie eine Intervallschachtelung für $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ konstruieren. Dazu definieren wir zunächst rekursiv eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen wie folgt:

$$b_1 := 2 \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(b_n + \frac{2}{b_n}\Big) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$\star$ Zeigen Sie:

(a) $1 \leq b_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $0 \leq b_n^2 - 2 \leq 4 \cdot 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definiere nun eine zweite Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := \frac{2}{b_n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$\star$ Zeigen Sie:

(c) $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) $0 \leq b_n - a_n \leq 4 \cdot 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; schließen Sie daraus $\inf(\{b_n - a_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = 0$.

$\star$ Damit sehen wir, dass alle Voraussetzungen von Satz 10.9 erfüllt sind.
Denn mit (b) folgt $b_n - b_{n+1} = \dfrac{b_n^2 - 2}{2b_n} \geq 0$, also $b_n \geq b_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus wiederum $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit (d) schließlich $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\inf(\{b_n - a_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = 0$.

Es gibt also genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq x \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun ist $x^2 \leq b_n^2 \leq 2 + 4 \cdot 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Schließen Sie daraus $x^2 \leq 2$. Andererseits ist $x^2 \geq a_n^2 = 4/b_n^2 \geq 4/(2 + 2^{-n})$. Schließen Sie daraus $x^2 \geq 2$. Es folgt $x^2 = 2$, d.h., $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Woche 29. November - 3. Dezember in den Übungsgruppen.