5. Übungsblatt zu Mathematik 1 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2021/22

Aufgabe 1. (V+Z) (a) Seien n und r zwei natürliche Zahlen. Zeigen Sie dass

$$1 + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r}{k} (1^k + 2^k + \ldots + n^k) = (n+1)^r \,.$$

(b) Finden Sie den Koeffizient von a^3 in $\left(\sqrt[4]{2a} - \frac{3}{a\sqrt{a}}\right)^{26}$.

(c) (Z) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Summe $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n} \cdot \frac{1}{2^k}$. Finden Sie eine geschlossene Formel für S_n und beweisen Sie dann diese Formel.

Hinweis : Benutzen Sie Pascals Identität, Satz 5.14.

Aufgabe 2. (V) (a) Schreiben Sie die Zahlen 191, 526, 1315 und 7623 in Binärdarstellung und in Hexadezimaldarstellung.

(b) Schreiben Sie 110001011_2 und 1011100010_2 in Hexadezimaldarstellung und in Dezimaldarstellung.

(c) Schreiben Sie $2CE_{16}$ in Binärdarstellung und in Dezimaldarstellung.

Wir schreiben hier *Binärdarstellung* statt 2-adische Entwicklung, *Dezimaldarstellung* statt 10-adische Entwicklung und *Hexadezimaldarstellung* statt 16-adische Entwicklung. Die Ziffern im Hexadezimalsystem sind die zehn üblichen Ziffern $0, \ldots, 9$ und dazu auch die Buchstaben A, B, C, D, E, F die den Dezimalzahlen $10, \ldots, 15$ entsprechen.

Aufgabe 3. (V) (a) Stellen Sie die Verknüpfungstabellen für den Ring $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ auf, analog zu Beispiel 8.5 der Vorlesung. Nach Satz 8.3 ist $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ kein Körper. Wie können Sie das an den Verknüpfungstabellen erkennen?

(b) Betrachte den Körper $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie für jedes $\overline{n} \in \mathbb{F}_7 \setminus \{\overline{0}\}$ das eindeutige $\overline{n}'$ mit $\overline{n}^{-1} = \overline{n}'$.

(c) Bestimmen Sie die folgenden Mengen

$$\begin{aligned}
A :&= \{(\overline{a}, \overline{b}) \in \mathbb{F}_{11} \times \mathbb{F}_{11} \mid \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}\} \\
B :&= \{(\overline{a}, \overline{b}) \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \mid \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}\} \\
C :&= \{(\overline{a}, \overline{b}) \in \mathbb{F}_{13} \times \mathbb{F}_{13} \mid \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. (**S**, 10=5+5 Punkte) Das Horner-Schema und die Polynom-Interpolation funktionieren für beliebige Körper K, insbesondere auch für endliche Körper. Wir betrachten hier den Körper $K = \mathbb{F}_7 = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{6}\}$.

(a) Finden Sie die eindeutige Polynomfunktion $f \in P_3(\mathbb{F}_7)$ mit

$$f(\overline{0}) = \overline{4}, \qquad f(\overline{1}) = \overline{3}, \qquad f(\overline{4}) = \overline{3}, \qquad f(\overline{5}) = \overline{3}.$$

(Siehe Folgerung 9.4).

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f in $\mathbb{F}_7$. Ist $c \in \mathbb{F}_7$ eine dieser Nullstellen, so bestimmen Sie die Polynomfunktion $g \in P_2(\mathbb{F}_7)$ mit $f(x) = (x - c)g(x)$ für alle $x \in \mathbb{F}_7$ (siehe Satz 9.1).

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Woche 22.-26. November in den Übungsgruppen.