4. Übungsblatt zu Mathematik 1 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2021/22

Aufgabe 1. (V) Zeigen Sie dass für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m, n, k \in \mathbb{N}$ gelten folgende Aussagen

(a) $a \equiv b \bmod n \quad \Longrightarrow \quad a^k \equiv b^k \bmod n.$

(b) $a \equiv b \bmod n$ und $m \mid n \quad \Longrightarrow \quad a \equiv b \bmod m.$

(c) $a \equiv b \bmod n \quad \Longleftrightarrow \quad ma \equiv mb \bmod mn.$

(d) $ma \equiv mb \bmod n$ und $\mathrm{ggT}(n, m) = 1 \quad \Longrightarrow \quad a \equiv b \bmod n.$

((Z) Zusätzlicher Teil : Als Anwendung finden Sie die letzten zwei Ziffern von 11^{128}, 11^{256} und 11^{1030} — in der üblichen Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl, und ohne einen Computer zu benutzen.)

Aufgabe 2. (**S**, 10=3+4+3 Punkte) (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass n^2 kongruent zu 0, 1 oder -1 modulo 5 ist.

(b) Finden Sie $r_i \in \{0, 1, \ldots, 12\}$ mit $2^{2021} \equiv r_1 \pmod{13}$, $3^{2021} \equiv r_2 \pmod{13}$, $5^{2021} \equiv r_3 \pmod{13}$, $7^{2021} \equiv r_4 \pmod{13}$, ohne einen Computer zu benutzen.

Hinweis : Zunächst bemerke dass $5^2 = 25 \equiv -1 (\bmod 13)$ gilt und benutze danach Aufgabe 1 (a) ; analog, $3^3 = 27 \equiv 1 (\bmod 13)$ etc. Bei 7^{2021} wird es ein bisschen komplizierter.

(c) Finden Sie alle Primzahlen p sodass auch $8p^2 + 1$ eine Primzahl ist.

Aufgabe 3. (V) Sei $A := \{\overline{1}, \ldots, \overline{9}\}$ wobei $\bar{n}$ die Restklasse von $n \in \mathbb{Z}$ modulo 10 bezeichnet (wie in Beispiel 4.10 der Vorlesung). Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(a) $\quad \{(\overline{n}, \overline{m}) \in A \times A \mid \overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{1}\}$

(b) $\quad \{\overline{n} \in A \mid \exists\, \overline{m} \in A : \overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{0}\}.$

Aufgabe 4. (V) (a) Berechnen Sie $\binom{11}{4}$.

(b) Berechnen Sie $(1 + \sqrt{5})^5 + (1 - \sqrt{5})^5$.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k$ für $n \in \mathbb{N}$.

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von

$$22 \cdot \mathrm{ggT}\left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-27)^k \, 82^{2n-k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 187^k \, 209^{n-k} \right).$$

Aufgabe 5. (V) Analog zur Definition der Fibonacci–Folge (Beispiel 6.4 der Vorlesung) definieren wir nun die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch

$$g(0) := 1, \qquad g(1) := -4 \qquad \text{und} \qquad g(n+1) := -3g(n) + 4g(n-1) \qquad \text{für } n \geq 1.$$

(a) Berechnen Sie $g(n)$ für $n = 2, 3, 4, 5$.

(b) Finden Sie eine geschlossene (nicht-rekursive) Formel für $g(n)$ und zeigen Sie diese mit vollständiger Induktion.

(c) Hier ist eine geschlossene Formel für die Fibonacci–Folge — wir werden später noch sehen, wie man diese Formel findet.

Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 6. (Z)
(a) Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge. Zeigen Sie, dass A abzählbar unendlich ist.

(b) Sei $B := \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \mathrm{ggT}(n,m) = 1\}$. Zeigen Sie, dass B abzählbar unendlich ist.
(Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $f\colon B \to \mathbb{N}$, $(n,m) \mapsto 2^n 3^m$, und benutzen Sie (a).)

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 7. (Z) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (also die Menge *aller* Teilmengen von $\mathbb{N}$) überabzählbar unendlich ist. Zeigen Sie nun, dass die Menge aller *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist.

Hinweis: Suchen Sie im Internet nach „set of finite subsets of N“(oder einem ähnlichen Stichwort); Sie werden viele Ideen dazu finden (auch manche falsche). Suchen Sie sich eine aus, die korrekt ist und Ihnen am besten gefällt, und schreiben Sie das Argument sorgfältig auf.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Woche 15.-19. November in den Übungsgruppen.