

3. Übungsblatt zu Mathematik 1 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2021/22

Aufgabe 1. (V) Zeigen Sie die Aussage in Beispiel 5.2(d) der Vorlesung:

Die Abbildung $f: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $(k, n) \mapsto 2^k(2n + 1) - 1$, ist bijektiv.

Aufgabe 2. (S, 9 Punkte) Wie in Beispiel 4.9 der Vorlesung sei $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Betrachte folgende Relation:

$$R := \{((n, m), (n', m')) \in A \times A \mid nm' = n'm\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.
- (b) Ein Paar $(n, m) \in A$ heißt gekürzt, wenn es keine natürliche Zahl $k > 1$ mit $k \mid n$ und $k \mid m$ gibt. Zeigen Sie, dass jede Äquivalenzklasse von R ein gekürztes Paar enthält.
Hinweis: Siehe Beweis von Lemma 2.6.
- (c) Zeigen Sie, dass $B := \{(n, m) \in A \mid (n, m) \text{ ist gekürzt}\}$ ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen ist.

Aufgabe 3. (V) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der folgenden Kongruenzgleichungen :

- (a) $99x \equiv 18 \pmod{30}$
- (b) $91x \equiv 84 \pmod{143}$
- (c) $x^2 \equiv 2 \pmod{5}$
- (d) $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$
- (e) $x^2 + x \equiv 0 \pmod{6}$
- (f) $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

Aufgabe 4. (V) Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 2x$.
- (b) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $x \mapsto \begin{cases} x - 2 & \text{falls } x > 1, \\ -x & \text{falls } -1 \leq x \leq 1, \\ x + 2 & \text{falls } x < -1. \end{cases}$
- (c) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $(l, m, n) \mapsto 2^l 3^m 5^n$.
- (d) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $(l, m, n) \mapsto 2^l 3^m 6^n$.
- (e) $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $S \mapsto S \cup \{37\}$.

Aufgabe 5. (V) Seien A, B, C nicht-leere Mengen und $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

- (a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
- (b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.
- (c) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.
- (d) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.
- (e) Ist f injektiv und g surjektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.

Aufgabe 6. (Z)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine $(n+1)$ -elementige Teilmenge von $\{1, 2, \dots, 2n\}$.

Zeigen Sie: Es gibt $a, b \in A$ mit a ungerade und $b = a + 1$.

Hinweis: Sei $B := \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}\}$. (Dies ist also eine Teilmenge der Potenzmenge von $\{1, 2, \dots, 2n\}$.) Gibt es eine injektive Abbildung $f: A \rightarrow B$? Betrachten Sie dann

konkret die Abbildung $f: A \rightarrow B$ mit $f(a) = \begin{cases} \{a, a+1\} & \text{falls } a \text{ ungerade,} \\ \{a-1, a\} & \text{falls } a \text{ gerade.} \end{cases}$

(b) Zeigen Sie: In jeder 101-elementigen Teilmenge von $\{1, 2, \dots, 200\}$ gibt es zwei Zahlen, so dass die eine die andere teilt.

Bemerkung: Dies sind Beispiele für das sogenannte *Schubfachprinzip* (oder *pigeonhole principle* auf Englisch). Allgemein besagt es: Sind n Objekte gegeben, die man auf m Schubladen verteilen möchte, wobei $n > m$ ist, so landen in einer Schublade mindestens zwei dieser Objekte. Wenn sich zum Beispiel 13 Leute treffen, so haben mindestens 2 von ihnen im gleichen Monat Geburtstag. Man braucht allerdings manchmal etwas Geschick, um in einem gegebenen Problem die Objekte und Schubladen richtig zu definieren, so dass man das Prinzip anwenden kann. In (a) würde man z.B. als Objekte die Elemente von A nehmen, und als Schubladen die Elemente von B .

Aufgabe 7. (Z) Auf der Menge $\{1, 2\}$ gibt es genau zwei mögliche Äquivalenzrelationen, auf der Menge $\{1, 2, 3\}$ gibt es fünf verschiedene Äquivalenzrelationen. Können Sie alle Äquivalenzrelationen auf diesen Mengen finden? Wie viele existieren auf den Mengen $\{1, 2, 3, 4\}$ und $\{1, 2, 3, 4, 5\}$? Wie viele existieren auf einer n -elementigen Menge?

Hinweis: Ist R eine Äquivalenzrelation auf einer endlichen Menge A , so erhält man eine disjunkte Vereinigung $A = A_1 \cup \dots \cup A_r$, wobei A_1, \dots, A_r die Äquivalenzklassen bzgl. R sind. Überlegen Sie sich umgekehrt, dass jede Zerlegung von A als disjunkte Vereinigung von Teilmengen eine Äquivalenzrelation definiert. (Siehe auch <https://math.stackexchange.com/questions/322738/>)

Schriftliche Aufgaben sind mit (S) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Woche 8.-12. November in den Übungsgruppen.